
V
B J
C
56076
II

L'Huillier Szymon

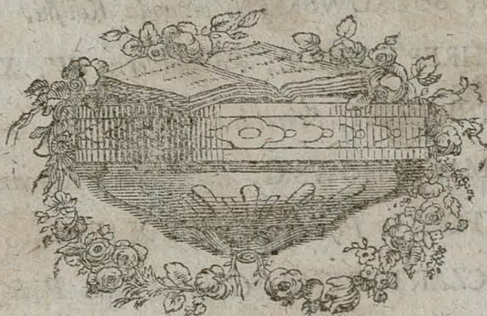
ALGIEBRA

DLÁ

SZKÓŁ NARODOWYCH.

Piérwszy raz wydaná.

Nieoprawná	. . . . . .	*Zł.* 6.
Oprawná w papiér	. . . .	*Zł.* 6 gr. 10.



ROKU 1782.

w Marywilu u *Michała Grölla* B. J. K. Mci Nro 24 pod znakiém Poëtów, i po wszystkich Szkołach w Kraiu.

Dziéło *Algiebra*, ułożoné przez Jmci Pana Lhuilier Obywatela Gieneweńſkiégo, a w Towarzyſtwie nauk w témże Mieście uſtanowioné policzonégo, które za ogłoſzoném w Polſzcze i w obcych kraiach uczonych wezwaniém, z pomiędzy innych potwiérdzénié i nagrodę odebrało, od Towarzyſtwa do Xiąg Eleméntarnych roztrząśnione, a przez Jmci X. Gawronskiego Kanonika Krakowſkiégo Lektora J. K. Mci, i w témże Towarzyſtwie zaſiadaiącégo na Polſki ięzyk z Francuzkiégo przełożoné, Szkołóm Narodowym do użycia podług przepiſów naſzych podaiémy. w Warſzawie na Seſſyi naſzéy dnia 2 Października Roku 1778.

IGNACY Xżę MASSALSKI, *Biſkup Wileńſki Prezyd.*

MICHAŁ Xżę PONIATOWSKI, *Biſkup Płocki.*

AUGUST Xżę SUŁKOWSKI, *Woiewoda Kaliſki.*

JOACHIM CHREPTOWICZ, *Podkanclerzy W. X. Litt.*

MICHAŁ MNISZECH, *Sekretárz W. Litt.*

HYACYNT MAŁACHOWSKI, *Referendarz Koronny.*

IGNACY POTOCKI, *Piſárz W. W. X. Litt.*

ADAM Xżę CZARTORYSKI, *Generał Ziem Podolſkich.*

JĘDRZÉY MOKRONOWSKI, *Gen. Inſp. Woyſk Kor.*

STANISŁAW Xżę PONIATOWSKI, *Generał Lieut. Woyſk Koronnych.*

FRANCISZEK BIELINSKI, *Staroſta Czérſki.*

ANDRZEY ZAMOYSKI, *Kawaler Orderu Orła Białégo.*



PRZESTROGA DLÁ NAUCZYCIELÓW.

Lubo podług uſtáw Prześwietnéy Kommiſſyi Edukacyynéy, Nauka Algiebry przez ciąg lát trzech miała bydź dáwaná, a zaczynaiąc ſię w Klaſſie IV. wráz z drugą Jeometryi częścią zabiérać miała ieſzcze po dwie godziny na tydzién i w Klaſſie V. dwuletniéy; że iednak nieprzerwany związek wiadomości Matematycznych, a w ſzczególności Algiebry, i ciągłé w nich postępowanié od rzeczy iednych do drugich, byłoby iſtotną przeſzkodą dlá Uczniów piérwſzoletnich Klaſſy V, do zrozumiénia tych Twiérdzén i Zagadnién, których zrozumiénié Ucznióm drugoletnim téyże Klaſſy iużby łatwieyſzé było, iako maiącym do tego wiadomości poprzedzaiącé z Nauki podanéy ſobie w roku piérwſzym téy Klaſſy; więc za zezwoléniem Prześwietnéy Kommiſſyi Edukacyynéy takowy czyni ſię porządek i odmiana względém czaſu uczénia Algiebry w Szkołach Wydzáłowych, do którey ſtóſować ſię maią i inné ſzkoły na trzy tylko Klaſſy podzieloné.

Gdy w czwártéy Klaſſie, w piérwſzych mieſiącach roku ſzkolnégo zakończoná będzie piérwſzá Częśc Jeometryi; odłożywſzy drugą Część do Klaſſy Piątéy, zacznie Nauczyciel dáwać zaráz Algiebrę, wyznáczaiąc iey té ſamé godziny, które w Uſtawach ſą na drugą Część Jeometryi, wraz z Algie-

brą

brą poświęconé. Sześć piérwſzych Rozdziáłów téy Nauki wyłożyć Uczniom w tym roku ſtaraniém Jego będzie: pamiętaiąc zawſze na to, aby nie poſtępowáł daléy z Uczniami, póki piérwéy ne będzie przeświadczony, że iuż dobrze to, co poprzedziło, poięli. W Piątéy Klaſſie piérwſzégo roku, tymże Uczniom dáwać będzie drugą Część Jeometryi, przypomniáwſzy im Część piérwſzą ſpoſobém w Uſtawach wyrażonym. Czas na tę Naukę tén ſám má bydź łożony, który ſię wyznaczył na Algiebrę podług Uſtáw. Gdy na drugi rok ci ſami Uczniowie zoſtaną, i przybędą do nich z Klaſſy IV. Uczniowie piérwſzoletni; tak dlá tych, iak i dlá owych kończyć będzie Nauczyciel Algiebrę, któréy iuż ſześciu piérwſzych Rozdziáłów nauczyć ſię powinni byli w Klaſſie IV, a dlá lepſzégo o tém zapewniénia ſię powtórzy té Rozdziały, zadaiąc różne z nich Uczniom zagadniénia. Czas téy Nauki w roku drugim będzie ténże ſám, który Przeświétná Kommiſſyá Edukacyyná iuż w Uſtawach ſwoich przepiſała. Tym ſpoſobém i ciąg nieprzerwany Algiebry zachowá ſię, i co Nauczyciel Matematyki wykłádać będzie Uczniom drugolétnim Klaſſy V, to równie i od Uczniów piérwſzoletnich będzie mogło bydź zrozumiané: bo tak ci, iak i tamci iednakowé do tego przyſpoſobiénié mieć będą w Klaſſie IV.

RE-

REIESTR ROZDZIAŁÓW.

ZBIOR SŁÓW POLSKICH

albo nowych, albo mniéy znanych, użytych w téy Xiędzie, z przydanémi obok słowami łacińskiémi, toż samo w używaniu Matematyków znaczącémi.

Bezistotny	Imaginarius.
Ciąg	Progressio.
Czynnik	Factor.
Istotny	Realis.
Mianowanié	Denominatio.
Mnogość	Potentia *albo* Dignitas
Nadmiar	Excessus.
Niedomiar	Defectus.
Nawias	Parenthesis.
Odiemnik	Subtrahendus.
Odiemny	Minuendus.
Oddzielnie	Abstractè.
Oddzielny	Abstractus.
Półdwóyny	Subduplus.
Przerabianié	Reductio.
Przydaynie	Positivè.
Przydayny	Positivus.
Równanié	Æquatio.
Równorzutnia	Parabola.
Rozbiór	Analysis.
Rozbiorowy	Analyticus.
Rozwiązanie	Solutio.
Spółczynnik	Coefficiens.
Sprawdzénié	Verificatio.
Strona równania	Membrum æquationis.
Szereg	Series.
Tosamość	Identitas.
Uiémny	Negativus.
Układ	Systema.
Warunek	Conditio.
Węgielnica	Norma.
Wielokrotny	Multiplus.
Wykładnik	Exponens.
Wymiar	Dimensio.
Wyráz	Terminus.
Wyznaczony	Determinatus.
Wzaiemny	Reciprocus.

ALGIE-

KRÓTKI ZBIÓR
HISTORYI MATEMATYCZNÉY.

Izbytnią i niepodobną byłoby rzeczą zwracać ſię aż do piérwſzych zawziątków nauki tak powſzechnie użytecznéy, iak ieſt Arytmetyka. Uſtanowiénié prawa włáſności, i utworzénié towarzyſtwa choćby też náymniéy ſzlicznégo, ieſt Epoką, w któréyby ſzukać należało piérwſzych nauki téy ſzladów. Ale w czaſach owych, gdzie rozum grubą ieſzcze ciemnotą był pokryty, przeſtaiąc ludzie na tém, co nagleyſzym ich potrzebom dogádzało, trzymali ſię zapewne bardzo nie doſkonałégo ſpoſobu rachowania ſwéy trzody, i innych dobytków, a wiadomości ich w téy mierze, tak ſzczuplémi były określoné granicami, że imiénia Nauki ani zaſłużyć, ani noſić nié mogły.

Toż ſprawiedliwie twiérdzić można i o piérwſzym Jeometryi wynaleziéniu. Jeżeli iednak domyślać ſię godzi, tedy podobno przed wſzyſtkiémi innémi Narodami Egipcyanie zatrudniali ſię tą częścią Jeometryi, która do rozmiaru i podziału gruntów ſię ściągá. Gdy Nil wylewami ſwémi, zabiéráł iednym właścicielom pola, a przydawáł drugim, potrzeba ſtąd wynikła dlá Egipcyán, wyznaczénia rozległości i położénia każdégo gruntu w ſzczególności, aby roſterki wyniknąć z podobnégo zamiéſzania mogącé, łatwiéy napotém uſpokoić. Práce za panowania Sezoſtryſa nakázané, i podięté około kopania ſchodzących ſię kanáłów, któremi w różne ſtrony Egipt

 był

był przerznięty, i inné tego rodzaiu, doſtatecznie dowodzą, że iuż owych czaſów nie mało w téy części Jeometryi poſtąpiono. Zdało ſię nawet poſpólſtwu, iż takowá robota, więcéy niż ludzkiégo rozumu ſkutkiém była, i przeto Bóſtwu za nię cześć oddawało. Jeſt nawet do prawdy podobieńſtwo, że u tychże Egipcyán zawzięła ſię piérwſzy ráz Matematyka uważaná, ilé ieſt Nauką i zbiorém niezawodnych prawideł. Przyczynę tego bardzo pozorną daie Aryſtoteles, że w tym kraiu, mòwi on, duchowni uwolnionémi byli od goſpodarſkich zatrudnién, i czas ſwóy doſkonaléniu rozumu poświęcali. Twiérdzić iednak z pewnością nié można, iak obſzérné były w téy mierze ich wiadomości.

Thales Milezyusz, który żył około 600 roku przed narodzéniém Chryſtuſa Pana, piérwſzy z Greków, ilé nám ieſt wiadomo, guſt do nauk Matematycznych wzniécił, i rozſzérzył. Tym końcém przeniòſł ſię on do Egiptu, aby był z przewodnictwa tamteyſzych Xięży, ſkárb nauk wſzyſtkich pod ſwoim kluczém trzymaiących pożytkowáł: i tylé tam w krótkim czaſie poſtąpił, że ſamych nawet przeſzedł Nauczycielów. Wymiàr Piramid przez niego uczyniony, z cienia, ktòry rzucały, zadziwił Króla Amazyſa. To działanié, które dziś zdaie nám ſię tak proſté, okazywało w owym czaſie wielki dowcip wynalázcy. Umiáł on niedoſtępnych przedmiotów wyznaczać odległości, lubo nie wiémy czyli iému winniśmy tén wynalazek. Nie doſzło do nás żádné dziéło tego dawnégo Jeometry; wielé mu iednak nowo odkrytych wiadomości przypiſuią. Między innémi ieſt i ta o nim powieść, że gdy doſzedł włáſności kąta w półkole, takiém to zadziwiéniém i radością go napełniło, że na znak wdzięczności ofiarę za tén dar Muzóm uczynił.

Nie ieſt tu mieyſcé mówić o licznych Thalesa wiadomościach, w innych częściach Matematyki, a oſobliwie w Aſtronomii.

Był on fundatorém ſekty, nazwaney *Jońſką*; i miáł wielu w niéy uczniów, których tu imiona opuſzczámy, zwłáſzcza że práce ich w Matematyce teoryczney bardzo mało nám ſą wiadomé.

Nié możémy atoli zamilczyć o Pitagoresie, urodzonym około 540 roku przed Chryſtuſém Paném, o uczniu Thalesa náyſławniéyſzym z obſzérnych w Aſtronomii, Jeometryi, Muzyce, Metafizyce, i innych głębſzych naukach wiadomości. Idąc on za radą Nauczyciela ſwégo, udáł ſię także do Egiptu, a ſtamtąd do Indyi, do tamteyſzych Brachmanów, od ktòrych ſławné o przenoſzéniu ſię duſz z ciała do ciała (Metempſicoſis) zdanie przeiął, i potém utrzymywáł.

Wie-

Wielé kraiów zwiedziwszy, osiádł we Włoszech, gdzie założył szkołę nazwaną *Pytagorycką*, która znaczną liczbę sławnych Matematyków wydała.

Odkrytá i dowiedzioná piérwszy ráz przez Pitagoresa równość kwadratu przeciwprostokątnéy z summą kwadratów ramión kąta prostégo, iedosyćby była do uczynienia imienia iego wiekopomném. Przyganiaią mu iednak, i uczniom iego, że częstokroć w Matematyce i w Fizyce szli za wykwintnémi a nawet i dziwacznémi wyobrażeniami, ktoré sobie w układzie świata poczynili. Nie wchodząc w pobudki ich szperáń przyznać wszelako należy, iż wielé rzeczy bardzo ważnych ztąd odkryto. Naukę brył foremnych przez nich podaną, sprawiedliwie dziś poczytuią za rzecz saméy tylko ciekawości dogadzaiącą; i cale się nie ściągaiącą do układu świata. Jak wielé atoli mámy wiadomości Jeometrycznych i Arytmetycznych, do których ta nauka zagłębiona, tak iak się zdaie, iż była przez Pitagoreyczyków, otwiérá drogę? Takąż w szczególności była i nauka o ilościach niespółmiernych, które sobie za cel godny usilnych szperáń wystawili. Jakoż doprowadziła ich do zagadnień tego gatunku, ktoréśmy nazwali zagadnieniami diiofantycznémi, a w których do tego się zmiérzá, aby uczynić spółmiérnémi ilości té, które uważané ogólnie, wystawuią nám się pod kształtém ilości niespółmiérnych. Takié naprzykład iest wyrażénié spółmierné trzech boków tróykąta prostokątnégo.

Empedocles, Filolaus, Architas, Timeusz, i Leucippus, byli znakomitszymi Pitagoresa uczniami: dzieła ich do nas nie doszły, po większéy zaś części ściągały się do Matematyki praktycznéy, a w szczególności do Astronomii. Dokładność i głębokość wielu ich wyobrażéń względem téy ostatniéy nauki dowodzą dostatecznie, iak obszérné mieli wiadomości i w Matematyce teorycznéy.

Toż twiérdzić możná i o dziełach Demokryta, który, iako zaświadcza *Poema* Lukrecyusza *o przyrodzeniu rzeczy* (de natura rerum) zdrowo bardzo i czysto sądził o wielu ważnych w Fizyce materyach.

Hippokrates z *Chio*, ułożył xiążkę początkową Jeometryi; nie znany teráz skądinąd, iak tylko z *Xiężyczków*, które się od imiénia iego nazywaią *Lunulae Hippocratis*.

Założénie szkoły Platońskiéy, iest znakomitą Epoką postępku w Matematyce. Plato, uczéń Sokratesa, czuł więcéy nad swego nauczyciela wáżność, i powaby téy nauki. Zwiedziwszy Egipt, i udáwszy się do Włoch, dlá nabrania światła większégo od sławnieyszych Pitagoreyczyków; powrócil

ił około roku 370 przed Chryſtuſém Paném do Atén oyczyzny ſwoiéy, gdzie założył ſławną ſzkołę, zaſzczyconą imiéniém Jego. Jeometryá była zaſadą iego nauk. Nad bramą wchòd do ſzkoły czyniącą, wyryty czytać ſię dáwał napis, wyłączaiący od ſpołeczeńſtwa nauk iego tych wſzyſtkich, ktòrymby początki Jeometryczne nie znané ieſzcze były.

Platonowi winniśmy część Jeometryi nazwaną *Rozbiorém dáwnym* (Analyſis antiqua).

Lubo mało nadto używana témi czaſy, przeczyć atoli nié możná, iż znacznie i ſzczęśliwie pomogła do wydoſkonalénia Jeometryi. Rozbiòr takowy zawiſł na tém, aby rozwiązać zagadniénié Jeometryczné, przez Jeometryą teoryczną, z uważania ſaméy figury, i przez takié wykréślénié, do iakiégo prawie zawſze prowadzą ſpoſobém wybornieyſzym rozumowania proſto do tego zmiérzaiącé, niżeli rachunek.

Drugim wynalazkiém ieżeli nie Platona, tedy uczniòw iego, ſą *Przecięcia oſtrokręgowé* (Sectiones conicæ), i ich właſności. Przyſtòſowali ié oni do rozwiązania ròżnych zagadnień, ktòrych albo przez liniią proſtą, albo przez ſamo koło rozwiązać nie możná. Takié ſą *np.* zagadniénia przecięcia iakiégokolwiek kąta na trzy ròwné części, wynaleziénia dwòch śrzednich ciągło-proporcyonalnych, i dwumnożénia ſześcianu. Spoſòb rozwiązania tych zagadnień podany od Menechma, i Dynostratesa, doſzedł do naſzéy wiadomości.

Trzecim wynalazkiém ściſły związek maiącym, z każdym ze dwòch powyżſzych, ſą *Mieyſca Jeometryczné*, których przykłady mieliśmy podané w początkowéy Jeometryi, a których obſzérnieyſzé wyłuſzczénié znaléźć będzie możná, w dziéle od nas zamyślonem, a ściągaiącém ſię mianowicie do piérwſzégo z tych trzech wſpomionych wynalázkòw.

Arystoteles, uczeń Platona, a nauczyciel wielkiégo Alexandra, i uſtanowiciel ſzkoły Perypatetyckiéy, znaiomſzy nám ieſt daleko bardziéy z prác ſwoich w Filozofii, Fizyce, i Hiſtoryi naturalnéy, niżeli w Matematyce.

Roſtérki i zamiéſzania zaſzłé po śmierci Alexandra wielkiégo, nie mało zatamowały poſtępek dalſzy nauk.

Założénié *Szkoły Alexandryyſkiéy* pod panowaniém Ptolomeuſzòw, czyni nową Epokę, w ktòréy nauki życié odzyſkały.

Między innymi Matematykami, ktòrych względy od Ptolomeuſzòw uczonym okazywané pociągnęły do Egiptu, wſławił ſię mianowicie Euklides, oſiádłſzy tám około roku 300 przed Chryſtuſém Paném. Oyczyzna iego, i ſzcze-

i fzczególnieyfzé życia okoliczności fą nám niewiadome. Początki Jeometryi przez niego napifane ftały fię iakoby xięgą świętą dlá wfzyftkich Matematyków. Zgromadził on tam w związku przedziwnym náyważnieyfzé podania początkowéy Jeometryi na ów czas znané. Sześć piérwfzych iego xiążek, prócz tych iedenáftá i dwunáftá, powinny bydź koniecznie czytané, i zrozumiané od tych, którzy tylko chcą pożytkować z dzieł Fizycznych, i wyżfzéy Matematyki; tak dlá wybornégo porządku i związku nieprzerwanégo podań iednych z drugiémi, iako téż i dlá tego, że wfzyfcy prawie Matematycy odfyłaią do xięgi Euklidesa, gdzie tylko zachodzi materya, którą on fię zatrudniał, albo gdzie poprzedzaiąca wiadomość iego dzieła potrzebna ieft do zrozumiénia tego, czego autor chce nauczyć.

Dzieło to Euklidesa było roztrząfané, wyłufzczané, i przekfztałcané od wielu Matematyków. Náylepfzé iego wydania fą té, które naywięcéy zbliżaią fię do oryginału Greckiégo. Takim ieft Bermanna po łacinie, i Roberta Simpsona po Angielfku, które po Francuzku przełożył P. Castillon.

Drugié dzieło Euklidesa mniéy znané od piérwfzégo, a ściągaiące fię do Rozbioru dáwnégo, do którégo téż za wftęp flużyć powinno, má tytuł. *Dané*, (ilości) (Data). Spodziéwámy fię mieć fpofobność obfzérnie o nim mówienia w dziele nafzém o téy materyi. Inni filozofowie fzkoły Alexandryyfkiéy fzczególniey fię Aftronomiią zatrudniali.

Archimedes, urodzony w Syrakuzie około roku 287 przed Chr: Panem, naywięcéy ze wfzyftkich ftarożytnych Matematyków podochodził rzeczy nayważnieyfzych, i naytrudnieyfzych. Jemu winniśmy wiadomość ftofunku powiérzchni, i bryłowatości kuli do powiérzchni, i bryłowatości walca na niéy opifanégo. Wynalázek tén tak mu był fzacowny i miły, że chciał go mieć wyrytym na grobie fwoim. On piérwfzy wyznaczył ftofunek okręgu koła, do iego śrzednicy, fpofobém cale doftatecznym do wfzyftkich przyftófowáń w kunfztach, i potrzebach życia. Do wyznaczénia tego użył wielokątów foremnych o 96 bokach, i w naftępnych piérwiáftków kwadratowych wyciąganiach, potrzebnych do zamiérzonégo przybliżénia, a zawiflych iednych od drugich, poftąpił fobie z zręcznością pełną takiéy przezorności, że omyłki nawet nieuchronné w takowych naftępnych wyciąganiach, zamiáft co miały ofłabiać iego rachunek, iefzcze mu pomágały. Z tego wynalazku mógł przez przybliżénié porównywać koło i iego części, z mieyfcami przez profté linije zawartémi, powiérzchnie, i bryłowatości oftrokręgów, walców, kul, i ich części, z powiérzchniami płafkiémi proftokreślnémi, i bryłami zakończonémi przez powiérzchnie płafkié. Odkrył on wielé iefzcze innych rzeczy

 nawet

nawet w Matematyce teoryczney, które iednak nie wchodzą w układ tych początków. Wynaleziénié przez niego dokładnéy kwadratury *Paraboly* albo *Równorzutni*, piérwszy wyſtáwiá przykład krzywéy linii mogącéy ſię zupełnie kwadrować, czyli porównać z powiérzchnią proſtokréślną.

Dzieła dawnych Matematyków, a w ſzczególności Archimedesa, różnią ſię mianowicie od nowſzych, w téy ściſłości poſtępowania, któréy ſię zawſze trzymali w ſwoich dowodzeniach. W Części II. Jeometryi §. 104 i naſt: ſtaraliśmy ſię dadź dokładné wyobrażénié ich *ſpoſobu czérpania*, którégo, oprócz innych przyſtóſowáń, używali ſzczególniey do zamiany porównániá mieyſc krzywokréślnych, i powiérzchni krzywych, na porównanie mieyſc proſtokreślnych; i do porównania brył zakończonych powiérzchniami krzywémi, tak z ſobą, iako téż i z bryłami zakończonémi przez powiérzchnie płaſkié. Spoſób tén mógłby bydź ſprawiedliwie uważanym, iak naſiénié wynalázków w nowych rachunkach, które wſłáwiły teraźnieyſzych Matematyków.

Zamiár naſz nie pozwálá nám mówić tu, czego doſzedł Archimedes w częściach wyżſzéy Matematyki, i w częściach Fizyko-Matematycznych, Mechanice, Katoptryce, i Hidraulice, które piérwſzy zaſzczepił. Obrona Syrakuzy, któréy przez ſamo tylko podeyście Rzymianie doſtać mogli, wielkość i wytworność dowcipu Archimedesa okazuie. Naylepſzé wydanié dzieł iego ieſt to, którém ſię zatrudnił Doktór Barrou.

Apollonius z *Pergu* w Pamfilii, urodzony prawie w półtrzecia wieku przed Chryſtuſém Panném; nazwany był *wielkim Jeometrą*, z przyczyny zapewné wielu bardzo w Matematyce wiadomości, które poſiádał; bo co ſię tycze dowcipu, w tym bez wątpienia Archimedes przeſzedł wſzyſtkich dawnych.

Wſłáwił ſię ſzczególniey Apolloniusz dziełem o Przecięciach Oſtrokręgowych. Które w ſwoim gatunku ieſt tém, czém dzieło Euklidesa ieſt względem Matematyki początków.

Inne Apolloniusza dzieła zawiéraiącé początkowé Matematyki Części w ſzacunku ſą, oſobliwie u tych, którzy ſię przywiązali do Rozbioru Jeómetrycznégo dáwnych.

Piérwſzé z tych dzieł, o *Przecięciu myślném*, (De Sectione Rationis) doſzło nas w ięzyku Arabſkim. P. Halley, iedén z celnieyſzych Matematyków tego wieku, dáł nám poznać to Dzieło w wyborném onego wydaniu po łacinie, roku 1708. Zagadniénié nayogólnieyſze, które ſię tam rozwiązané znáyduie, ieſt naſtępuiącé: *Maiąc dané z położénia dwie linii proſté, i dwa punkta, (po iednym na każdéy z tych linii) pociągnąć przez trzeci punkt dany linią trzecią, którąby od dwóch piérwſzych odcięła części rachować ſię maiącé od punktów danych, takie,*

któ-

któréby były w ſtoſunku danym. Wielka odmienność, która bydź może w położeniach trzech punktów danych, czyni téż wielką rozmaitość przypádków, przez które to Dzieło ſłuży bardzo do ćwiczénia ſię w Rozbiorze.

Uważaiąc wytknięte od PAPPUSA mieyſca, w Xiędze pod tytułem *Zbiory Matematyczné,* (Collectiones Mathematicæ) pozbierali Matematycy teraźnieyſi, i na nowo nám prawie podali Dzieła APOLLONIUSZA.

Tenże ſám co wyżéy P. HALLEY, przywrócił nám Dzieło o *Przecięciu mieyſca* (De Sectione Spatii).

Różni ſię to Dzieło w tém od piérwſzégo, że zamiáſt ſtoſunku części odciętych przez liniią ſzukaną, kładzie ſię ich proſtokąt.

W Dziele o *Przecięciu wyznaczoném* (De Sectione determinata) znayduie ſię rozwiązanie náyogólnieyſzégo zagadniénia naſtępuiącégo: *Maiąc dané czté-ry punkta na iednéy linii, znaléźć punkt piąty na téyże ſaméy linii, taki, aby Proſtokąt odległości tego punktu, od dwòch punktòw danych, był do Proſtokąta odległości tegoż punktu od dwóch innych danych, w danym ſtoſunku.* Dzieło to APOLLONIUSZA było naprzód ułożoné przez SNELIIUSZA Matematyka Hollénderſkiégo, ale ſpoſobem od Jeometrycznégo bardzo oddalonym. Dało ſię potém widzieć wráz z innémi wybornémi rozbioru Matematycznégo wzorami w Dziełach pogrobowych (poſthuma) Roberta Symſona (*)

Ténże ſám Matematyk powrócił do ſwoiéy całości inné ieſzcze Appolloniuſza Dzieła pod tytułem: *Mieyſca płaſkie* (Loca plana) tak w rozbiorze Jeometrycznym potrzebné, iak EUKLIDESA DANÉ (ilości). To Dzieło, które w ſwoim czaſie, i mieyſcu obſzérniéy i dokładniéy poznać damy, zawiérá wielé włáſności mieyſcowych linii proſtéy, i koła. Zebrał ie także, i ułożył FERMAT i SCHOTTEN, ale w dokładności uchybili.

W Piątym Dziele o *Dotknięciach* (de Tactionibus) náytrudnieyſzé ieſt Zagadnienie *wykreślenia koła kтòréby ſię trzech innych dotykało*; a w ogólności Dzieło to zawiérá rozwiązanié dzieſiąciu Zagadnień, w które wchodzą punkta, linie, i koła, wyznaczaiące wielkość i położénié takiégo koła; któréby ſię ich dotykało. VIETE Matematyk, Francuz, żyiący w ſzeſnáſtym wieku wydał na nowo to Dzieło pod imiéniém Apoloniuſza Francuzkiégo; wráz z ſwoiém trudnieyſzém ieſzcze od piérwſzégo, gdzie zamiáſt liniy proſtych, i kół, kła-

(*) Winniśmy wyborné Dzieł pogrobowych tegoż wielkiégo Matematyka wydanié, ſtaraniu i wſpaniałości LORDA STANHOPE, iednégo z naygłębſzych Matematyków tego wieku. Przyznać należy, iż w Anglii Jeometryá dawnych znalazła ſwoié ſchronienié, a tén z wielu miár zacny Pan, nie mało ſię z ſtrony ſwoiéy przyłożył do iéy rozſzérzenia.

kładzie płaſzczyzny, i kule którychby dotykała ſię kula ſzukaná. Dziéła tego Matematyka ſą bardzo rzadkie, i trudno ich doſtać. Lawson Angielczyk, dobrze biegły w Rozbiorze dáwnych, wydaniém wybornéṁ obudwóch tych dzieł w oyczyſtym ſwoim ięzyku, łatwieyſzémi ié do nabycia uczynił.

Dziéło naoſtatek Apolloniusza o *Pochyłościach* (De inclinationibus) zawiérà w ſobie między innemi, ogólné Zagadnienie, i do wielu bardzo ſzczególnych przypàdków, mogące ſię przyſtoſować, a to ieſt takowe: *Niech będą dwa koła dané z położénia, i niech środki ich łączą ſię linią: przez punkt gdzie ta linia ſpotyká okrąg iednégo z kòł, trzeba poprowadzić taką linią, ktòréy część zawartá między okręgami tych dwòch kół, byłaby wielkości danéy.* Maryn Gethaldi Raguzańczyk po części pozbierał to dziéło; dopełnił go Anderson, ale ſpoſobém cale Algiebraicznym. Horsley Sekretarz Towarzyſtwa uczonych Londyńſkiego, zatrudnił ſię takiém iego wydaniém ktorému nic nie brakuie.

Teodozyusz z Trypolu znany ieſt mianowicie z Dziéła ſwego, o ilościach *Kuliſtych* (De ſphaericis) ktòré lubo ſzczegòlniéy ściągá ſię do Aſtronomii, nauki celnieyſzey tego Matematyka, átoli iednak ſłużyć może i do Jeometryi początkowéy. Wydanié tego dziéła przez Doktora Barrow ieſt naylepſzé.

Matematyka ròwnié iakį i inné nauki i umieiętności, iednakowego w zaniedbaniu ich doznały loſu przez piętnáście, lub ſzeſnaście wiekòw *Czaſokczu* (aera) Chrześciańſkiego. Długi ten przeciąg wiekòw ciemnych gdzie nie gdzie zabłyſnął światłém dowcipu, ktòrego iednak ani liczba, ani obſzerność nie odpowiadała cale tak wielkiéy czaſu rozległości.

Menelaus w drugim wieku piſał o *Trygonometryi.* Dzieło iego o *Cięńciwach* (de Chordis) ktòré do nàs nie doſzło, zawiérać w ſobie miało ułożénié Tablic Trygonometrycznych. Zoſtawił ieſzcze pamiątkę ſwoię w dziele o *Troykątach kuliſtych.*

Severus w trzecim, lub czwartym wieku podał o *Przecięciach Walca* Dziéło ſwoie, w ktòrém wielé znayduié ſię kawàłkòw początkowych. Halley w wydaniu ſwoiém przyłączył ié do przecięć Oſtrokręgowych Apolloniusza.

Do tąd nic prawié nie mòwiliśmy o wiadomościach Matematykòw dáwnych w rachunku. Jakoż bardzo mało poznakòw mamy ich w tey mierze ſzperáń i dochodzeń. Kſięgi iednak 7, 8, 9, 10, Euklidesa dowodzą między innémi poſtępku ich i w téy części Matematyki; a nawet i práce

ce Aſtronomiczne, ktòremi ſię zatrudniali, wyciągały koniecznie téy wiadomości. Nie ieſt nám wiadomo, czyli ſpoſòb od nich użyty podobny był do naſzego Algiebraicznego, w przypádkach, gdzie zachodzące trudności zdaią nam ſię przewyżſzać rachunek ſaméy Arýtmetyki.

Diofant z Alexandryi, ktòry żył w czwártym wieku, miany ieſt za wynalazcę Algiebry, z przyczyny, iż Dziéło iego pod tytułem *Zadań Arytmetycznych*, náydáwnieyſzé ieſt z tych wſzyſtkich, ktòré nás doſzły w tey części Matematyki. Autor tego Dziéła rozwiązáwſzy wielé Zagadnień piérwſzego ſtopnia, wyznaczonych, przywiązał ſię ſzczegòlniey, do tego gatunku Zagadnień, ktòré noſzą iego Imié, i w ktòrych założył ſobie uczynić ſpołmiernémi té ilości, ktòré ſię wyſtawiaią pod kſztałtém ilości nieſpółmiernych. Z trzynáſtu Xiążek ktòré w początku ſwoim zawierało iego Dziéło, nie zoſtało nám tylko ſześć, w ktòrych Diofant coráz daléy poſlępuie koleyno z trudności iednéy do drugiéy; i z tey to miary ſzkoduiemy ſzczegòlniéy z utraty reſzty xiążek iego. Wielu Autorów poźnieyſzych iak *np.* Fermat, Vieta, Bachet, Frenicle, Billi, Prestet, rozſzérzyło coráz bardziéy Teoryą Diofanta w tym gatunku Zagadnień; drugi iednak Tom Algiebry Eulera ſtanie teraz za wſzyſtkie tamté Dziéła.

Dziéło Pappusa z Alexandryi pod tytułem *Zbiorów Matematycznych*, (Collectiones Mathematicae) ma ſwóy ſzacunek z Hiſtoryi Matematycznéy, i wiele nam pomogło do poznania ſpoſobu poſtępowania dáwnych w ich ſzpéraniach i do znaiomości w dochodzeniach ich Xiąg; których ınaczéy i tytuły nawet nie byłyby nám wiadomé. Słychać iż teráz w Anglii pracuią około tego Dziéła wydania poprawniéyſzego od tych wſzyſtkich ktòré go poprzèdziły.

Po wzięciu Alexandryi w Roku 641, i zburzeniu ſzacownéy i niezmiernéy Biblioteki, ktòrá znakomitą była ozdobą tego Miaſta, iuż żadnégo więcéy nie znayduiemy Matematyka, którégo prace mogłyby bydź z prácami dáwnieyſzych poròwnané. Arabowie ćwiczyli ſię w Matematyce oſobliwie *mieſzanéy* (Matheſis mixta.) Tłumaczénia przez rożnych Autorów Greckich, dało ich ſzczególniéy poznać teraźnieyſzym Matematykom; i ułatwiło im tę naukę. Arabòm także winniśmy ſproſtowanié Rachunków Trygonometryi płaſkiey, i kuliſtey; ktòre za czaſów Menelausa, i Ptolomeusza były bardzo rozwlekłé. Użycié wſtáw łuków, zamiáſt ich Cieńciw wielé pomogło do tego ſproſtowania. Im przypiſuią i proſtość znaków naſzych liczebnych, iako też i ſztukę w ich układaniu, i mianowaniu.

 Podo-

Podobieństwo famo słowa Algiebry, do nazwiska Matematyka Gebera dało powód do poczytania go za Wynalazcę téy nauki.

Upadek Państwa Greckiégo, i wzięcie Stambułu, wśrzód piętnastégo wieku, ieft początkiém odnowiénia Nauk na Zachodzie. Wfparcié które tam Królowie i Xiążęta, ofobliwie we Włofzech, dáwali uczonym, pociągało ich do opufzczenia oyczyzny uciśnioney, i do zafzczépiénia w tamtych kraiach Nauk prawie nie znanych. Tłumaczono naprzód Autorów dawnych a nié zadługo potém, porzuciwfzy niewolniczé naśladowaniá, własnego rozumu fiłami pracować zaczęto. Drukarftwo na początku fzesnáftego wieku wfzędzie iuż prawie było używané, i wielé bez wątpiénia pomogło do rozniefiénia światła. W tym właśnié wieku widzieć fię dały piérwfze wydania Dziéł dáwnych Matematyków: Euklidesa, Archimedesa, Apoloniusza, Teodozyusza, i infzych. Commandinus między infzemi, nié miáł dosyć na famém zebraniu tego co dawnieyfi przed nim pifali; ale licznémi a dobrze przyftófowanámi przypifami, okázał obfzérność wiadomości fwoich w Matematyce. Tartalea zafzczycił Imię fwoié przez użyteczné i dowcipné w Algiebrze wynalázki. a Maurolicus wiele w przecięciach Oftrokręgowych podochodził.

Viete pracował we wfzyftkich częściach Matematyki teoryczney. Wyżey mówiliśmy o przywróconym nám przez niego Dziele Apoloniufza o *Dotknięciach*. Piérwfzy on pociągnął przybliżénié rachunku okręgu koła, aż do 10 dziefiętnych; wprowadził ogólné znaki zamiáft fzczególnych; których aż do czafów iego używano, a tak dał nowy kfztałt Algiebrze, i użyteczznieyfzą ią uczynił. Można go mieć fprawiedliwie za piérwfzego Zafzczepiciela Trygonometryi *Rozbiorowey*. (Trigonometria Analytica) Wiele on bardzo poodkrywał w rozwięzywaniu rownáń wyżfzych, i uftanowił pewną drogę, która prowadzi do doyścia wielkiéy wági Twierdzenia Newtona o *Mnogościach ilości dwuczęściowéy* (De potentiis binomii.) Umarł w Paryżu R 1603. Schotten wydał R. 1645. wfzyftkie Dzieła iego, które tylko mógł zebrać.

Metius i Ludolf Van Ceulen Hollender, znani fą, mianowicie z prác fwoich około przybliżénia rachunku ściągaiącégo fię do okręgu koła. Piérwfzy z nich znalázł ftofunek śrzednicy koła do iego okręgu bardzo do dokła-

(*) Algiebra Łukasza De Burgo piérwfzá z druku wyfzła naprzod roku 1494. a potém 1523. Nie zafzedł w niéy Autor daléy iak do równáń drugiégo ftopnia. Scipion Ferreo, Cardan, Tartalea, Ferrai, Bomabtti, dotknęli koleyno, i rozciągnęli rzecz o Równaniach trzeciégo i czwartego ftopnia.

kładnego przybliżony, oráż profty, iak 113 do 355. Drugi przybliżénié ftofunku tego pociągnął aż do 35 znaków dziefiątnych.

Nonius Jeometra Portugalfki wflawił fię wielą w Matematyce wynalázkami. Zamiár náfz, nie pozwala nám przytoczyć, tu, iak tylko famo wynaleziénie podziału imieniém iego zafzczyconego, który tak użytecznym ftał fię w Jeometryi praktyczney, i Aftronomii.

Byrge, który *obferwacyami* i robieniem Matematycznych narzędzi bawił fię przy Landgrafie Hesskim, miany ieft za piérwfzégo wynalázcę Logarytmów: nic iednak w téy mierze nie wydał. Jému także przypifuią użyteczny wynalazek *Cerkla proporcyonalnégo.*

Pomiędzy wielą Matematykami wieku fzefnaftégo, bardziéy z wielości prác fwoich, niż z wynalázków nowych fláwnémi, Clavius fzczególniéy flynął i obfzérnémi fwémi w Matematyce wiadomościami zadziwiáł.

W wieku oftatnim naywiękfzy i nayokázalfzy wzroft wzięły Matematyczné nauki. Tu naywięcéy nieznanych dáwniéy w Matematyce práwd odkryto, i nayfzczęśliwiéy ich przyftofowania do wfzyftkich Fizyko-Matematycznych części poczyniono. Wykłád wielkich tych rozumu ludzkiégo wyfiléń w zamiár nafz nie wchodzi, ktorego celém famé tylko są części Matematyki początkowé.

Piérwfzém odkryciém w Matematyce teoryczné y są Logarytmy. Namiéniliśmy wyżéy, iż Byrge naprzòd myślą na nie napadł, i pracować koło nich przedfięwziął, czego iednak w téy mierze dofzédł, tego ani my nie wiémy, ani nawet Neper Baron Szkodzki, ktorému przeto wynalázek tén fprawiedliwie zdaie fię należyć, o tém nigdy nie flyfzał. Własność i używanié takowego liczb gatunku, opifaliśmy iuż na fwoim mieyfcu doftatecznie. Zoftaie nám fama tylko część Hiftoryczná. Piérwfzy kfztałt, który dáł Táblicom fwoim Logarytmowym Neper mniéy był wygodny od kfztałtu Táblic nafzych zwyczaynych; a to w tém, że Logarytmy liczby 10, i iéy różnych mnogości nie były złożoné z faméy tylko *Cechy* (Characteriftica;) ale z Cechy, i liczb ułomkowych, (nazwanych w tym razie *Mantiffa*). Ta przywara znáydowała fię w piérwfzém wydaniu iego wynalázku roku 1614; w dziéle pod tytułém: *Mirifici Logarythmorum Canonis defcriptio.* Poftrzégł fám zaráz niewygodę, którá ftąd wynikała, w rachunkach ofobliwie Trygonometrycznych, i dał potém nowy kfztałt Táblicom fwoim, których iuż powtórnie wydadź nié mògł, dla śmierci, którá go zafkoczyła roku 1618. Syn iego wy-

 dru-

drukował tę odmianę, w dziéle pod tytułém *Appendix de Logarythmorum præſtantiori via.* (*)

Neper powierzył myśli ſwoich Henrykowi Bryggs, Nauczycielowi Oxfordſkiému; który wielką część téy roboty wykonał. Rachowáł on áż do 14 znaków Logarytmy liczb zwyczaynych, zacząwſzy od 1, do 20000; i znowu od 90000, áż do 100000 i wydáł ié pod tytułem: *Arithmetica Logarithmica.* Gdy iuż daleko doſyć zaſzedł był i w rachunku Logarytmów ilości Trygonometrycznych, śmierć go tym czaſem zabrała. Henryk Gellibrand dokonáł, i wydáł toostatnié Dziéło roku 1630; pod tytułém: *Trigonometria Britannica.* Adryan Vlacq Hollender dopełnił, czego mu ieſzcze do większéy wygody brakowało. Dáł Táblicóm kſztáłt mnieyſzy od Angielſkiégo arkuſzowégo, i wyrachował Logarytmy ilości Trygonometrycznych od 10 do 10 minut drugich. Mámy tych Táblic kilka wydáń. Táblice Gardynera, Schewreina, Daparciusza, Rivarda, i Schultza, dla dokładności w drukowaniu, i porządku w ułożéniu ich ſzczególnieyſzéy warté ſą zalety.

Wynalázki teraźnieyſzych Matematyków w rachunkach wyżſzych, podaią ſpoſoby, ſkracaiącé i ułatwiaiącé tego gatunku rachunki; o których dotąd mówiliśmy.

Kepler wſławił ſzczególniéy imié ſwoié przez ſzczęśliwé w Aſtronomii odkrycia. Liczné iego w tym rodzaiu prácé, doſyćby były do przeświádczénia nás o obſzérnych iego wiadomościach w Matematyce teoryczné y. Jego *Stereometria Doliorum* zawiérá w ſobie takié zamiary, któréby mógły były tym co po nim naſtąpili, dopomódz do nowych wynalázków. Założył on ſobie, względem Brył utworzonych z obrotu różnych części Koła, i Przecięć Oſtrokręgowych, wielorakié Zagadniénia z których niektóré rozwiązał, a innych wielé przechodziło granice ſzczupłégo ieſzcze światła w onym wieku. Té Zagadniénia naſtępnym po nim Jeometrom, ſłużyły za bodziec do równania ſobie dróg nowych. Dóyścié Guldina więcey do Mechaniki, iak do Matematyki teoryczney należące, (którèy iednak podaie liczné przyſtoſowania) ieſt podobno ſkutkiém w tym razie zabranych z Keplera wiadomości. *Spoſób niepodzielnych* (ilości) *Methodus indiviſibilium* znaleziony przez Cavallerego, o którym mieliśmy mieyſcé mówienia w Jeometryi, był narzędziem wielu

(*) Imié Neppera znané ieſt ieſzcze i z innych względów. Bo że na ſamych tylko początkowych częściach przeſtaniémy, wſpomniémy przynáymniéy, iż on wielé ſię przyłożył do ſproſtowania rachunków Trygonometryi kuliſtéy. Jeſt on także autorém Ciekawości Arytmetyczné y nazwané y *laſkami Nepera* (les Batons de Neper). Jeſt to gatunek Machiny Arytmetyczney, ułatwiaiącey niektóré rachunki.

wielu nowych tworów w ręku wynalázcy, a początkiém większéy ieszcze ich liczby dlá tych, którzy po nim nastąpili.

Insze odkrycia, które FERMAT, ROBERVAL, PASCAL, WREN, WALLIS i GRZEGORZ od S. Wincentego, poczynili, w liniach krzywych wyższych niż początkowe, są nieiako stopniami, przez które rozum ludzki postępował aż do owych przedziwnych wynalázków NEWTONA i LEIBNITZA, na których samem wspomnieniu Imion wielkich przestać tu musimy.

HUYGHENS rodem z Hollandyi, urodzony R. 1629. szczególniey Matematykom dáł się poznać przez nowe w Mechanice, i Astronomii odkrycia, i przez pisma swoie do Fizyki ściągaiące się. Ta nawet ostatniá práca iego, wielkiego wydaie Matematyka. W ogólności zaś mówiąc, wiele on się przyłożył do postępku w Matematycznych naukach, w tych osobliwie częściach, które przechodzą granice początków, lubo i tych nawet nie zaniedbał. Idąc za przewodnictwem Dzieła iego, o *Wynalezionéy wielkości koła*, pokazaliśmy w Jeometryi Części I, dokładność przybliżoną stosunków náygodnieyszych Okręgu koła, do iego średnicy. Dzieła prawie wszystkie tego wielkiego Męża, pisane są z tą w dowodzeniach dokładnością i ścisłością, które szczególniey zalecaią Dzieła dáwnych Matematyków.

VIVIANI sławnego Galileusza uczeń nad pismami dáwnych Matematyków, a osobliwie APOLONIIUSZA bardzo wiele pracował. Podáł on wszystkim uczonym ciekawe zagadnienie ściągaiące się do dokładnego kwadrowania części powierzchni kulistey, które pierwsi tegoż wieku Matematycy LEIBNITZ, JAKOB BERNOULLI, MARGRABIA de l'HOPITAL, WALLIS, i GREGORY rozwiązać przedsięwzięli. Náyprościeysze iednak z pomiędzy wszystkich iest samego VIVIANIEGO takowe rozwiązanie: *Przez środek podstawy Półkuli, niech przechodzi płaszczyzna prostopadłá do płaszczyzny téy podstawy; na téy płaszczyznie niech będą nakréślone dwa półkola maiącé za średnice, Promienie spólné tey płaszczyznie podstawy; a na tych dwóch połkolach wystáwmy sobie iakoby stoiącé dwa walce prosté, któréby przenikały pòłkulę i z iedney, i z drugiey strony; odetną oné od powierzchni półkuli cztéry sztuki takié, że reszta powierzchni pozostała ròwnać się będzie podwoynému kwadratowi promiénia pòłkuli.* GUIDO-GRANDI, który w roku 1701 przydáł dowodzenia dokładne do wielu VIVIANIEGO wynalázków, o których on tylko namienił, przytácza i insze niektóre ciekawości Jeometryczne, tegoż co wyżey gatunku; *np: Gdy na podstawié Ostrokręgu prostégo, nakreślony będzie iakikolwiek Wielokąt, i znowu na tymże Wielokącie, iak na podstawie będzie Ostrográn prosty przechodzący przez Ostrokrąg, odetnie on od powierzchni Ostrokręgu z strony wierzchołka część taką, która cale może bydź kwa-*

 dro-

drowaną. Ale o takowych w Matematyce dochodzeniach, równie iak o niektórych częściach koła kwadrować się mogących, iednoż trzymać należy, iż to są ciekawości, z których nic daley ku użytkowi iakiemu wyciągnąć nie można.

Kartezyusz, który więcey zasłużył sobie bydź znanym z prac Matematycznych, a niżeli z dowcipney swey Filozofii, ale dalekiey od natury, rozciągnął osobliwie ogólną teoryą Równáń wyższych, i głębszą Jeometryą, przez wprowadzenie rachunku literalnego w działania Jeometryczne. To wprowadzenie zdolnym go uczyniło do przebycia tych wszystkich trudności, którym dawni wydołać nie mogli. Znáydziemy podobno właściwsze gdzie indziey mieysce mówienia, o pożytkach, i nieprzyzwoitościach tego wprowadzenia: a w szczególności o iego potrzebie w częściach głębszych Matematyki. P. Sluze w przystósowaniu Algiebry do Jeometryi wiele ważnych rzeczy powynáydywáł, ale te w zamiár nasz nie wchodzą.

Ze wszystkich dzieł początkowych w sposobie Kartezyusza ułożonych, szczególnieyszego wárta iest zalecenia *Arytmetyka powszechna* Newtona. Dosyć iest wspomnieć tego Autora, do wzbudzenia winnego mu szacunku i uszanowania. Mámy wyborne iey wydanie staraniem Castillona, który ią nadto przypisami swemi przyozdobił. Przypisy te po wielkiey części ściągaią się do rozwiązania Jeometrycznego Zagadnień podług sposobu dáwnych, który lubo sobie wysoce szacowáł Newton, nie użył go iednak w tem Dziele; ale dopiero, gdzie też przyzwoitsze znaláźł mu mieysce, w Xięgach swoich nieporównanych pod tytułem: *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis.* P. Horsley, má wydadź wszystkie razem Dzieła wielkiego tego, i pierwszego między Matematykami poźnieyszymi męża.

W Dziele P. Guinee, *Algiebra przystósowaná do Jeometryi*, żądaćby często można większey dokładności.

Bardzo wiele powychodziło Dzieł początkowych Matematycznych, przez teraźnieyszych Autorów napisanych, w których Młódź znaleźć może nie małą pomoc do rozszerzenia swoich wiadomości; i do przyuczenia się uważać iedne przedmioty, pod różnemi względami. Niepodobná prawie, a razem i nieużyteczná rzecz byłaby wyliczyć ie wszystkie dokładnie. Wspomniemy iednak niektóre, nie chcąc wszelako poniżać tych, o których wzmianki uczynić nám nie przyidzie.

Jeometryá praktyczná P. Le Clerc, bardzo iest zdatná do wprawiania poczynaiących w działania ręczne, i do spoufalenia ich z przedmiotami Jeometryi.

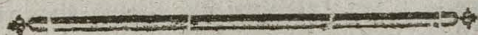
Clairaut, ieden z nayglębſzych Matematyków tego wieku, raczył iednak zniżyć ſię, i do początkowych Matematyki części. Początków iego Jeometryi zamiarem, ieſt przyuczyć młódź do ściſłości Matematyczney, i do pokazania im poſtępu w wynalázkach. Algiebra iego początkowá, byłaby ze wſzech miár doſtateczná, gdyby ieſzcze więcey przykładów zawierała. Niedoſtatkowi temu zaradzili w Xięgach ſwoich Algiebry, Saunderson, Simpson, Mac-laurin i Euler. W Arytmetyce i Jeometryi Camusa, Dziełach z innych miar bardzo dobrych, brakuie większey zwięzłości.

De la Caille zamknął w niewielkiey dosyć Xiążce wszystko to, cokolwiek ieſt ważnieyſzego w Matematyce początkowey; ſtą zaś dokładnością to wykonáł, która właściwá ieſt i innym iego Dziełóm. Karsten w Dziele ſwoim może mu bydź z tey miary porównany.

Zadaią Matematykom Francuſkim, iż oni mniey ſą troſkliwi o ściſłość w dowodzeniach; a w ſzczególności, iż wiele ſobie w tey mierze pozwalaią w podaniach, daiących mieyſce do wprowadzenia ilości niepodzielnych, nie wyłożywſzy pierwey i niedowiódłſzy prawości tego używania. W ciągu xiąg naſzych Elementarnych wſpomnieliśmy iuż o wybornym Dziele początkowym P. Bertranda Profeſſora Matematyki w Gienewie.

Uczniowie ktòrzy zechcą nad granice początków przeſtąpić, i poznać przyſtoſowania Matematyki teoryczney, wielką do tego znaleźć mogą pomoc w Dziełach PP. De la Caille, Mauduit, Bossuet, Bezout, Wolf, Kaestner, i Segner, i innych podobnych. *Przecięcia Oſtrokręgowé* podane przez Simsona, Hamiltona, Guido-Grandi, ſą to wyborne Dzieła napiſane ſpoſobem cale Jeometrycznym, dawnych. *W Pezecięciach Oſtrokręgowych* Margrabi *de l'Hopital*, w Xięgach pod tytułem: *Inſtitutions Analitiques* Panny Agnesi; *Introductio ad Analyſim Infinitorum*, Eulera; *Introduction à l'Analyſe des lignes Courbes*, Cramera, możemy czerpać naylepſze ſpoſoby przyſtoſowania rachunku do Liniy krzywych, i te Dzieła ſłużyć nám mogą do przeyścia od początków do części wyżſzych Matematyki teoryczney.

Naoſtatek *Pamiętniki* (Mémoires) Akademiy Paryzkiey, Londyńſkiey Petersburgſkiey, Berlińſkiey, i inſze, wiele bardzo oſobnych kawałków zawieraią, ściągaiących ſię do Matematyki teoryczney, i przyſtoſowaney.



ALGIEBRA.

ALGIEBRA

ROZDZIÁŁ I.

Zagadniénia, w które iedna tylko niewiadomá ilość wchodzi, i samé ilości cáłkowité.

1. Działania Arytmetyki, są około znaków wyráżaiących ilości samé wiadomé, końcém dochodzénia z nich ilości niewiadomych.

Pod działania Algiebry podpádaią bez braku tak wiadomé, iako niewiadomé ilości, z których piérwsze od drugich rozmaitémi się sposobami póty oddziélaią, póki ważność drugich nie będzie oznaczoná przez piérwsze w wyrazach iak náyprościeyszych. Na tę iednę różnicę Algiebry od Arytmetyki, wzgląd mieć w początkach będziémy.

Uwági w Arytmetyce uczynioné, względém znaków z samégo ludzi upodobania wybranych na wyrażénie naszych wyobrażéń, a wszczególności na wyrażénié wielkości, té, mówię, uwági, ieżeli nie zniéśé zupełnie, tedy przynáymniéy zmnieyszyć powinny té trudności, które na piérwsze weyźrzénié mogłyby się komu stáwiać przed oczy, z przyczyny różnicy dopiéro wzmiánkowanéy.

2. Krótkość znaków używanych w Arytmetyce, na wyrażénié wielości rzeczy iakich, a zatém i łatwość wystawiénia sobie w myśli tychże rzeczy patrząc na té znaki, pokazuie nám użytek iedén z náyznakomitszych w przybraniu tych skróconych znaków, na mieysce ilości, które się przez nié wyráżaią. Z tegoż powodu wprowadzoné są i znaki ukazuiące ilości niewiadomé. Gdyby poięcié naszé nie było tak, iak iest, niedoskonałé; nie trzebaby nám téy pomocy. Stworzénia nie tak, iak my, ograniczoné, patrzyłyby podobno razém na związek wiadomości danych w zadaniu, z odpowiedzią żądaną, bez szukania tych środków, przez które, dlá słabości naszégo poięcia, przechodzić musimy.

3. Aby się tém widoczniéy przeświádczyć, iż znaki na wyrażénié ilości niewiadomych bardziéy daleko dlá wygody, niż z potrzeby są wprowadzoné; użyiémy w wielu przykładach dwoiakiégo sposobu: z których w iednym zdáwać się będzie, że nad samémi tylko wiadomémi ilościami, tak właśnie iak w Arytmetyce, rozumuiémy, w drugi zaś wnidą znaki ilości nie-

wiadomych, i przez ogólné reguły (któré na swoiém mieyscu podámy) dochodzić będziémy z pewnością niezawodną célu zamiérzonégo. Piérwszy nazwiémy *sposobém postępowania Arytmetycznym*, albo *przez rozumowanié*, drugi *Algiebraicznym*.

4. Tén dwoiaki postępowania sposób tym z większym będzie użytkiém, że uczących się Algiebry wprawi oráz w Loikę praktyczną. Większá część Uczniów, którzy w dalszém pożyciu ćwiczyć się w Matematyce nie będą, tén prawie iedyny zysk, ale zysk wielki, z nauki téy odniosą.

5. Nie trzeba iednak obiecywać sobie, aby zawsze porównanié tych dwóch sposobów uczynić można. Wielé bardzo iest zadáń tak zawikłanych, żebyśmy ich przez samo rozumowanié rozwiązać nie potrafili, nie wezwáwszy na pomoc narzędzi, i tych sposobów któré nám Algiebra podaie. Należy więc w zadaniach prościeyszych nauczyć się używania tych narzędzi, i tych sposobów: aby wprawa w obchodzéniu się z niémi zmnieyszyła nám trudność, gdy ich używać przyydzie w zadaniach zawilszych. A wszczególności w częściach niektórych Fizyko-Matematycznych, wielé bardzo zdarzá się przypádków, gdzie użycié tych narzędzi i tych sposobów koniecznie iest potrzebné. I gdyby nawet, osobliwszé iakié maiąc przeniknienié, mogliśmy dóyśdź przez samo rozumowanié do rozwiązania podobnych trudności, bardzo iednak często stałoby się to sposobém daleko dłuższym, i mniéy ogólnym: w naukach zaś do praktyki przystósowanych wielé na tém zawisło, aby nie tylko dóyśdź, ale dóyśdź iak náyprostszą drogą célu zamierzonégo.

Zadanié I. Z dwóch osób, któré oznaczámy przez A, i B, piérwszá má dwa razy tylé ilé drugá: má zaś piérwszá 12 złotych więcéy od drugiéy: iléż má każdá z tych osób w szczególności?

W tém zadaniu dwie są ilości niewiadomé: toiest maiątek iednéy, i drugiéy osoby, dwie także ilości są dané, toiest różnica maiątku piérwszéy osoby od drugiéy, i liczba oznaczaiącá, ilé razy maiątek piérwszéy osoby, większy iest od maiątku drugiéy. Każdá z tych wiadomości szczególnie wziętá, nie prowadzi do pewnégo rozwiązaniá zadania: bo możná znaléźć tylé ilości, ilé tylko zechcémy, któré iednéy z tych wiadomości uczynią zadosyć: ale dwie tylko są takié ilości, któré tak iednę, iak i drugą wiadomość zawartą w zadaniu wypełniaią. Wiadomości dané i prowadzącé do znaleziénia ilości, których szukámy, nazywaią się *Warunkami* zadania (Conditiones). Przez samo zaś zadanié zapytani bywámy, iakié są ilości, czyniącé zadosyć tym Warunkom.

Sposób I.

Sposób 1. rozwiązania przez rozumowanié. Ponieważ A, dwa razy má tylé, ilé B, więc Nadmiár (excessus), piérwszégo maiątku nad drugi, iest w saméy rzeczy tym drugim maiątkiém, a że tén nadmiár iest 12. złotych, więc drugi maiątek, toiest, Osoby B, iest 12 złotych: a zatém maiątek piérwszéy Osoby A, która má mieć dwa razy tylé, ile drugá, będzie 24. zł: Jakoż té dwie liczby 24, i 12. wypełniaią dwa warunki dané, toiest 24. zawiérá w sobie dwa razy 12, a nadmiár 24 nad 12, iest 12.

Sposób 2. Algiebraiczny. Możná oznaczyć maiątek osoby mniéy maiącéy przez znak iakikolwiek. Powszechnie iednak oznaczaią Matematycy, ilości niewiadomé przez ostatnié abecadła litery, *np:* x, y, z.

Niech więc x znaczy maiątek osoby B, toiest 12 złotych: będzie zatém maiątek osoby A, dwa razy większy, oznaczony przez x dwa razy wzięté, toiest przez $2x$.

A że maiątek osoby A, przewyższá maiątek osoby B, 12. złotémi, więc téż maiątek osoby A, może bydź oznaczony przez x, powiększoné 12 Zł: toiest przez $x+12$ (znak $+$ wymáwiá się tém słowém *więcéy*).

Będzie tedy mògł bydź oznaczony maiątek osoby A, dwóma wyrażéniami, toiest przez $2x$, albo przez $x+12$.

Ponieważ té dwa wyrażénia iednę ilość znaczą, więc $2x$, będzie rò-wne, $x+12$: ta zaś równość tak się oznáczá, $2x = x+12$. Znak $=$ czytá się tak, iak gdyby było napisané, *równá się*, albo *równé iest*.

Gdy dwie ilości są równé, a tak od iednéy, iak i od drugiéy odeymiémy ilość iednakową, reszty będą równé. Ponieważ tedy $2x = x+12$; więc odiąwszy x z jednéy i z drugiéy strony; reszty x i 12, będą ròwné, a zatém $x = 12$.

Aże x oznáczało maiątek osoby B, więc maiątek osoby B, iest 12, maiątek zaś osoby A, dwa razy większy, i przewyższaiący liczbą 12. maiątek osoby B, będzie 24, które 24 i iest 2 razy większé od 12, i przewyższá ié liczbą 12.

7. *Przykład 2. A, má trzy razy tylé, ilé B, má zaś więcéy 18 złotémi od B: iléż má A, ilé B?*

Przez rozumowanié. Ponieważ A, trzy razy má tylé, ilé B, więc nadmiár maiątku A, nad maiątek B, będzie dwa razy ieszcze większy od maiątku B.

Że zaś tén nadmiár iest 18 Zł: więc maiątek B, będzie połową 18, toiest 9 złotych. Maiątek A, tak z téy miary, że trzy razy iest większy od maiątku B, iako i z téy, że przewyższá maiątek B, 18 złotémi, będzie 27 złotych.

 Przez

Przez Algiebrę. Maiątek B. . . . . x.

Maiątek A. . . . . $3x$ albo $x+18$.

Więc $3x=x+18$; odiąwszy x po obu stronach . . . . . . $2x=18$. Gdy ilości są równé, ich téż połowy będą równé: więc podzieliwszy przez 2 z jednéy i z drugiéy strony, będzie . . . .

. . . $x=9$.

Maiątek tedy B . . . . 9.

Maiątek A . . . 27.

Té dwie liczby czynią zadosyć dwóm warunkóm położonym w zadaniu.

Inszé przykłady. A, má razy 4, 5, 6, 7 i t. d. tyle, ilé B, różnica maiątków iest 60.

8. *Uwági.* Gdy się zastanowimy nad sposobém postępowania w szukaniu rozwiązania Zadáń poprzedzaiących; postrzeżémy tam pięć różnych części.

W piérwszéy, dané są nazwiska ilościóm niewiadomym. Té nazwiska były poczęści wzięté z upodobania, po części nie. I tak maiątek osoby B, nazwaliśmy x, a mogliśmy go równie nazwać, y, z, lub inaczéy: ale wyrażénié drugiéy ilości niewiadoméy iuż wypádało z wyrażénia piérwszégo, i z warunków zadania.

Oznaczyliśmy naprzód maiątek mnieyszy: bo z niego łatwo zaráz było oznaczyć maiątek większy przez dodanié lub rozmnożénié. Gdybyśmy zaś naprzòd nazwali maiątek większy; tedy maiątek mnieyszy trzebaby było oznaczyć przez odeymowanié lub dzielénié: łatwiéy zaś iest dodadź i rozmnożyć, niż odiąć i podzielić.

Ta przezorność w dáwaniu naprzód nazwisk ilościóm mnieyszym, z których potém przez dodáwanié lub mnożénié, wypádaią wyrażénia ilości większych, nie tylko łatwieyszé czyni i prostszé oznaczénia ilości niewiadomych, ale nad to skrácá dalszé działánia. *Trzeba często powtárzać tę uwágę zwłászcza w Zadaniach zawilszych.*

Tę część dochodzénia ilości niewiadomych nazwiémy *Mianowaniém* (Denominatio). Zawisła ona na tém, aby dadź nazwiska ilościom niewiadomym.

W drugiéy części pokázała się *Tosamość* (Identitas) dwóch wyrażéń iednéy ilości. Tosamość ta nazywá się *Równaniém* (Aequatio).

Dwa wyrażénia oddzieloné znakiém równości = nazywać się mogą *stronami równości*, (taká iedna strona nazywá się po łacinie *Membrum aequationis*);

tionis); a gdy té ſtrony złożoné ſą z wielu znaków, każdy z nich nazywá ſię *wyrazém* (Terminus). Tę drugą część nazwiémy Warunkiém: bo ona wypádá z iednégo, lub więcéy warunków, czyli wiadomości, które wchodzą w Zadanié.

W trzeciéy części ułatwiliśmy w tén ſpoſób Równanié, że znak ilości niewiadoméy zoſtáł ſám, i wolny od innych ilości, które mu zawadzały. Reguła ogólná oſwobodzénia ilości niewiadoméy od połączonych z nią ilości wiadomych, ieſt: użyć działania przeciwnégo tému, przez które wmięſzały ſię ilości wiadomé do ilości niewiadoméy. I tak w Równaniu: $3x = x + 18$: ponieważ na obu ſtronach Równości, znaydowało ſię x, odięliśmy go od iednéy i od drugiéy ſtrony, aby ilość niewiadomá po iednéy tylko ſtronie zoſtała: wypadło ſtąd równanié $2x = 18$, w którém, że x, znak ilości niewiadoméy, rozmnożony ieſt przez 2, uwolniliśmy go dzieląc piérwſzą i drugą ſtronę Równania przez 2, ſkąd naoſtatek wypadło Równanié: $x = 9$.

Tę trzecią część nazywać będziémy *Przerábianiém* (Reductio), któré na tém zawiſło, aby przez rozmaité działania przywiéśdź do tego Równanié, żeby po iednéy tylko ſtronie zoſtała ilość niewiadomá równaiącá ſię ſamym ilościóm wiadomym.

To zdziáławſzy, przyśliśmy do *czwártéy części*, ktòrą nazwiémy *Rozwiązaniém*, (Solutio). Rozwiązanié zamyká w ſobie odpowiédź na Zadanié, toieſt zamyká wyrażénia ilości przedtém niewiadomych, w ilościach wiadomych.

Nakoniec *w piątéy części* doświádczámy, czyli wyrażénia ilości ſzukanych znalezioné w ilościach danych i wiadomych, zgádzaią ſię z Warunkami Zadania, toieſt, czyli Zagadniénié dobrze ieſt rozwiązané. To działanié nazywá ſię *Sprâwdzéniém* (Verificatio) (*).

9. *Przyſtóſowanié tego porządku do Zadania iednégo z powyżſzych.*

A, má cztéry razy tylé, ilé B: má zaś A, 60 złotych więcéy niż B.

Mianowanié. Maiątek B . . . . . . x.

Maiątek A . . . . . . $4x$ albo $x + 60$.

(*) Winniśmy tén porządek Jmć Panu LE SAGE Gieneweńczykowi policzonému w wielu Towarzyſtwach uczonych. Zatrudniony on będąc rozmaitémi, a wielkiéy wági prácami około wyżſzych części Filozofii, nié miáł ſpoſobności podania do druku Piſm ſwoich Eleméntarnych.

Warunek $4x = x + 60$.
Przerábianié. Odiąwszy $1x$ po obu stronach; będzie. . . .
. . . . $3x = 60$. Podzieliwszy przez 3. będzie . . . .
. . . . $1x = 20$.

Rozwiązanié. $1x = 20$. Maiątek B.
$4x = 80$. Maiątek A.
$x + 60 = 80$. Drugié wyrażénié maiątku A.

Sprawdzénié. $80 = 80$. Tu oczywiście widzieć się daie, że dwa wyrażénia maiątku A, są równé, a zatém zadanié iest rozwiązané.

10. *Zadanié 2. Dwie osoby A, i B, maią razém 24 złoté: má zaś A, 2 razy tylé ilé B: iléż má A, ile B?*

Rozwiązanié Arytmetyczné. Ponieważ A, dwa razy tylé má ilé B; więc summa obudwòch ich maiątkòw zamykać będzie maiątek B, razy trzy: że zaś ta summa iest 24 Zł: więc 24 iestto liczba zamykaiącá w sobie trzy razy maiątek B; a zatém maiątek B, będzie trzecią częścią złotych 24, toiest będzie Zł: 8. Przeto maiątek A, dwa razy większy, będzie 16 złotych. Summa 8, i 16 złotych, czyni 24 złote, ktòré miały obiedwie razém osoby A, i B.

Algiebraiczné. Mianowanié. Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $2x$.
Summa maiątkòw $3x$.

A że ta summa czyni 24 złote, więc będzie,
Warunek. $3x = 24$.
Przerábianié. Podzielmy iednę i drugą stronę Ròwnania przez 3, będzie $1x = 8$.

Rozwiązanié. $x = 8$. Maiątek B.
$2x = 16$. Maiątek A.
$3x = 24$. Summa maiątkòw.

Sprawdzénié. Summa maiątkòw iest taká, iaká bydź powinna, toiest 24: maiątek téż A, dwa razy iest większy od maiątku B.

Insze przykłady. A, má 3, 4, 5, 6, i t. d. razy tylé ilé B: summa ich maiątków, iest 36, 40, 48, 49, i t. d.

11. *Zadanié 3.*

11. *Zadanié 3. W Zgromadzéniu ze 100 osób złożonêm A, i B, stawaią się o iedén urząd. A, dziesiącią kréskami przewyższá B: iléż każdá z tych dwóch osób A, i B, miała krések?*

Arytmetycznie. Gdyby tylé krések dano na A, ilé na B; tedyby tak osoba A, iak i B, miała po 50. krések, (gdyż wszystkich krések iest 100). Dlá téyże przyczyny ieżeli A, má 1, 2, 3, i t. d. kréskami więcéy, niż 50; B, będzie miało 1, 2, 3, i t. d. kréskami mniéy niż 50: a zatém osoba A, w tych razach będzie miała, 2, 4, 6, i t. d. więcéy krések, niż B.

Więc liczba krések, ktòrą má A, więcéy niż 50, B zaś mniéy niż 50, iest połową téy liczby, ktòrą kréski na A, przewyższaią kréski na B: a że A, má więcéy 10 kréskami niż B, więc A, má 5 kréskami więcéy niż 50, a B má 5 kréskami mniéy niż 50. Więc na A, dano krések 55, na B, 45.

Jakoż dodawszy 55, do 45. Summa będzie 100: a odiąwszy 45, od 55, Ròżnica będzie 10.

Algiebraicznie. Mianowanié. Kréski na B . . . . . x.
Kréski na A . . . . . $x+10$.
Summa krések . . . . $2x+10$.

Warunek. $2x+10=100$.

Przerábianié. Odiąwszy 10 po iednéy i po drugiéy stronie, będzie $2x=90$. Podzieliwszy przez 2 . . . .
$1x=45$.

Rozwiązanié. $x=45$. Kréski na B.
$x+10=55$. Kréski na A.

Sprawdzénié. Warunki są zachowané: bo i summa krések iest 100, i A, má więcéy 10 kréskami, niż B.

Insze przykłady. A, i B, maią razém . . . 144, 148, 157, 163, i t. d. Zł. A, má więcéy niż B, 36, 52, 63, 57, i t. d. Zł.

12. *Zadanié 4. Osoba A, trzy razy tylé miała, ilé B, zyskáwszy nad to 12 złotych, má cztéry razy tylé, ilé B: iléż má A, ilé B?*

Arytmetycznie. Ponieważ osoba A, zyskáwszy 12 złotych, má 4 razy tylé, ilé B, a przed zyskiém miała tylko trzy razy tylé, ilé B; więc zysk osoby A, ròwny iest maiątkowi osoby B: a zatém maiątek B, iest 12 złotych.

złotych. Więc maiątek A, przed zyſkiém był 36, a po zyſku 48 złotych, toieſt 4 razy tak wielki, iak maiątek B.

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $3x$.
Maiątek A, z zyſkiém . . . . $3x+12$. albo $4x$.
Warunek. $4x=3x+12$.

Przerábianié. (Odiąwſzy $3x$ po obudwu ſtronach) $1x=12$.

Rozwiązanié. $x=12$. Maiątek B.
$3x=36$. Maiątek A.
$4x=48$. Maiątek A, z zyſkiém.
$3x+12=48$. Maiątek A, z zyſkiém.

Sprawdzénié. Dwa wyrażénia Maiątku A, wráz z zyſkiém ſą rowné.

Inſzé przykłady. A, má 3 razy tylé, ilé B. A, zyſkuie 12 Zł: i má potém 5 razy tylé, ilé B.

A, má 3 razy tylé, ilé B: B zyſkuie 12 Zł: i potém A, mieć będzie tylko 2 razy tylé, ilé B.

15. *Zadanié 5. A, má trzy razy tylé, ilé B: A, i B, zyſkuią po 12 Zł: po czém A, má tylko dwa razy tylé, ilé B.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był po zarobku trzy razy większy od maiątku B, z zarobkiém; trzebaby zyſkać oſobie A, trzy razy tylé, ilé zyſkała oſoba B, toieſt trzebaby iéy zyſkać 36 Zł: A że zyſkuie tylko 12 złotych; więc po tym zyſku nie doſtaie iéy ieſzcze 24 Zł. aby 3 razy tylé miała, ilé B, także z zyſkiém. Ze zaś oſoba A, po zarobku z obu ſtròn má tylko 2 razy tylé, ilé B; więcby nad to trzeba iéy mieć ieſzcze tylé, ilé má B, aby maiątek iéy był 3 razy tak wielki, iak ieſt maiątek B: a zatém maiątek B po zarobku ieſt 24 Zł: a przed zarobkiém był 12 złotych.

Piérwſzy Maiątek B . . . . 12. Drugi maiątek B . . . . 24.
Piérwſzy Maiątek A . . . . 36. Drugi maiątek A . . . . 48.

Algiebraicznie. Mianow: Maiątek 1wſzy B . . . . x.
Maiątek 1wſzy A . . . . $3x$.
Maiątek 2gi B . . . $x+12$.
Maiątek 2gi A . . . $3x+12$, albo . . . . . . $2x+24$.

Warunek

Warunek. $3x+12=2x+24$.

Przerabianié. (Odiąwszy 12 z obu stròn) $3x=2x+12$.
(Odiąwszy $2x$ z obu stròn) $1x=12$.

Rozwiązanié. $x=12$. Maiątek 1wszy B.
$3x=36$. Maiątek 1wszy A.
$x+12=24$. Maiątek 2gi B.
$3x+12=48$. Maiątek 2gi A.
$2x+24=48$. Maiątek 2gi A.

Sprawdzénié. Dwa wyrażénia maiątku powtòrnégo A, są ròwné.

14. *Przykład 2. A, má 5 razy tylé, ilé B: zyskuią po 18 złotych: i potém A, má tylko 3 razy tylé, ilé B.*

Przez rozumowanié. Aby maiątek A, był i po zysku 5 razy tak wielki, iak iest maiątek B, z zyskiém swoim, trzebaby téż, aby i zysk A, był 5 razy większy od zysku B, toiest, aby był 90 Zł. Że zaś zysk A, iest tylko 18 złotych, więc po zysku będzie ieszcze brakowało osobie A, 72 złotych do wyrównania maiątku B, 5 razy wziętégo. A że maiątek A, wráz z zyskiém, iest tylko 3 razy większy od maiątku B, także z zyskiém; więc aby wyròwnał maiątek B, wráz z zyskiém pięć razy wzięty, nie dostaie ieszcze maiątku B, i z zyskiém, 2 razy wziętégo: więc maiątek B i z zyskiém 2 razy wzięty iest 72 Zł: a zatém ráz wzięty i z zyskiém, iest 36 Zł. Osoba tedy B, miała przed zyskiém 18 złotych.

Maiątek 1wszy B . . . . 18. Zł. Maiątek 2gi B . . . . 36. Zł.
Maiątek 1wszy A . . . . 90. Zł. Maiątek 2gi A . . . 108. Zł.

Przez Algiebrę. Mian:
Maiątek 1wszy B . . . . x.
Maiątek 1wszy A . . . . $5x$.
Maiątek 2gi B . . . . $x+18$.
Maiątek 2gi A . . . . $5x+18$.
albo . . . . $3x+54$.

Warunek. $5x+18=3x+54$.

Przerab: (Odiąwſzy $3x$ z obu ſtròn,) $2x + 18 = 54$.
(Odiąwſzy 18 z obu ſtròn,) $2x = 36$.
(Podzieliwſzy przez 2 z obu ſtròn) $x = 18$.

Rozwiązanié. $x = 18$. Maiątek 1wſzy B.
$5x = 90$. Maiątek 1wſzy A.
$x + 18 = 36$. Maiątek 2gi B.
$3x + 54 = 108$. Maiątek 2gi A.
$5x + 18 = 108$. Maiątek 2gi A.

Sprawdz: Dwa wyrażénia maiątku 2giego A, ſą ròwné.

Inſzé przykłady. Oyciec, który teráz trzy razy ſtarſzy ieſt od ſyna, za lát 15 będzie tylko dwa razy od niego ſtarſzym, iléż teráz má lát tén oyciec, ilé ſyn?

A, má 5 razy tylé, ilé B, A, zyſkuie 12 Zł. B, zyſkuie 20 złotych. Po tym zyſku, A, mieć tylko będzie 3 razy tylé, ilé B: iakiż ieſt maiątek A, iaki B?

15. *Uwága.* Gdyby nám przyſzło rozwięzywać naſtępuiącé Zadanié: *A, má 3 razy tylé, ilé B: tracą po złotych 15, i potém A, mieć będzie 4 razy tylé, ilé B:* chcąc znaleźć maiątek A, i B, poſtąpilibyśmy ſobie podobnie iak wyżéy, z tą tylko ròżnicą, żeby zacząć trzeba dziáłanié od maiątku tych dwòch oſòb po ſtracie, ſkąd łatwoby potém doſzło ſię przez dodanié, ilé miały przed ſtratą.

16. *Zadanié 6. Mąż zapiſuie teſtaméntém żonie ſwoiey złotych 14000, ieżeli powiie Córkę, téy zaś Córce Zł: 7000: przeciwnie, ieżeli powiie Syna, tedy Synowi zapiſuie Zł: 14000, a Matce 7000. Zdárzá ſię, iż Matka powiiá razém Syna i Córkę. Jakże przyydzie podzielić bez krzywdy między Matkę i Dzieci maiątek Męża?*

Arytmetycznie. Zdaie ſię bydź tén zamiár w teſtaméncie, aby Syn miáł tylé dwoie co Matka, a Matka tylé dwoie co Còrka. Podług tego, iakáżkolwiek część maiątku doſtałaby ſię Còrce; Matka powinna będzie wziąźć tylé dwoie co Còrka, Syn tylé dwoie co Matka, a tylé czworo co Còrka. Té tedy trzy Oſoby będą miały między ſobą 7 części maiątku, z ktòrych każdá ròwnać ſię będzie udziałowi Còrki. Podzieliwſzy więc tén maiątek na 7 ròwnych części, Còrka weźmie iednę taką część, Matka 2, a Syn 4. A że

14000 i 7000, czyni 21000 Zł: i ſkłádá cały maiątek, a ſiòdmá iego część ieſt 3000 Zł: więc doſtanie ſię

Còrce . . . . . 3000 Złotych.
Matce . . . . . 6000.
Synowi . . . 12000.

Summa 21000.

Algiebraicznie. Część dlá Còrki . . . . . x.
Część dlá Matki . . . . . $2x$.
Część dlá Syna . . . . . $4x$.

Summa . . . . . $7x$.

Warunek. $7x = 21000$.

Przerábianié. (Podzieliwſzy przez 7 z obu ſtròn)
$1x = 3000$.

Rozwiąz: $1x = 3000$. Udział Còrki.
$2x = 6000$. . . . . . Matki.
$4x = 12000$. . . . . Syna.

$7x = 21000$ Cały maiątek.

Inſzé przykłady. Trzy Oſoby: A, B, C, złożyły ſię na 36000 Zł. Skłádka B, dwa razy większá od ſkłádki A, ſkłádka zaś C, trzy razy większá od ſkłádki B.

Cztéry Oſoby: A, B, C, D, złożyły ſię na 20000 Złotych. Skłádka B, dwa razy większá, od ſkłádki . . . . A.
C, trzy razy większá, od . . . . A.
D, cztéry razy większá, od . . . . A.

17. *Zadanié 7. A, má więcéy 18 Zł: niż B.*
B, má więcéy 30 Zł: niż C.

Maią zaś razém 150 Zł: iléż má każdá Oſoba w ſzczególności?

Arytmetycznie. C, náymniéy má z tych trzech Oſòb. Ponieważ A, má więcéy 18 Złotych niż B, B, zaś więcéy 30 Zł: niż C; więc A, mieć

mieć będzie 48 Złotych, więcéy niż C. Summa Maiątku B, i C, równá ieſt maiątkówi C, dwá razy wziętému, i nadto 30 Złotych. Summa zaś maiątku A, B, i C, równá ieſt maiątkowi C trzy razy wziętému, dodáwſzy 30 i 48 Zł: toieſt, dodáwſzy 78 Złotych. Więc maiątek C, trzy razy wzięty, dodáwſzy do niego 78 Złotych, uczyni 150 Zł: a zatém ſám maiątek C, trzy rázy wzięty, mnieyſzy będzie 78 Złotémi, toieſt, wynieſie tylko na 72 Złote. Więc maiątek C, ſám przez ſię, ieſt trzecią częścią 72 Zł: toieſt 24 Zł:

Maiątek C . . . . . 24. Złote.
Maiątek B . . . . . 54.
Maiątek A . . . . . 72.

Summa . . . . 150.

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątek C . . . . x.
Maiątek B . . . . $x + 30$.
Maiątek A . . . . $x + 48$.

Summa Maiątków . . $3x + 78$.

Warunek. $3x + 78 = 150$.

Przeráb: (Odiąwſzy 78 Zł: z obu ſtrón) $3x = 72$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . $x = 24$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Maiątek C.
$x + 30 = 54$. Maiątek B.
$x + 48 = 72$. Maiątek A.
$3x + 78 = 150$. Summa Maiątków.

Inſzy przykłád. *A, má więcéy 14 Zł: niż B.*
B, má więcéy 20 Zł: niż C.
Summa maiątku tych trzech Oſób ieſt 172 Złote.

18. *Uwága.* W poprzedzaiących przykładach, oprócz dwóch piérwſzych warunków, czyli wiadomości, dáná ieſzcze ieſt i trzeciá, toieſt, ſumma maiątku trzech Oſób. Gdyby zamiáſt téy trzeciéy wiadomości, była nám daná różnica maiątku A, i C, i ta w przykładzie piérwſzym inna była a nie 48 Zł: tedy zadanié byłoby niepodobné do rozwiązania. Gdyby zaś ta różnica daná nie inná była iak 48 Złotych; tedy ta trzeciá wiadomość nie byłaby

byłaby nową, boby się iuż zamykała we dwóch piérwszych wiadomościach razém złączonych. Warunki więc, czyli wiadomości w zadaniu wyrażoné powinny bydź dané takié, aby iedné od drugich nie zawisły.

19. *Zadanié* 8. *A, má więcéy 48 Zł: niż B,*
C, má tylé, ilé A, wráz z B.
Summa maiątku tych trzech Osób iest 400 Zł: iléż má każda z osobna?

Arytmetycznie. Ponieważ C, má tylé, ilé razém A, i B; więc maiątek C, iest połową maiątku A, B, C; toiest C, má w saméy rzeczy 200 złotych, a zatém A, i B, razém mieć téż będą 200 Zł: Ze zaś A, má więcéy 48 złotych niż B; więc A, mieć będzie 24 Zł: więcéy niż 100 Zł: B, zaś mieć będzie 24 Zł: mniéy niż 100 złotych.

Maiątek A	124 Zł.
Maiątek B	76.
Maiątek C	200.
Summa maiątków	400.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $x + 48$.
Maiątek C . . . . $2x + 48$.

Summa . . . . . $4x + 96$.

Warunek. $4x + 96 = 400$.

Przerábianié. (Odiąwszy 96 z obu stron) $4x = 304$.
(Podzieliwszy przez 4) $x = 76$.

Rozwiązanié. $x = 76$. Maiątek B.
$x + 48 = 124$. Maiątek A.
$2x + 48 = 200$. Maiątek C.
$4x + 96 = 400$. Summa Maiątków.

Insze przykłady. A, má więcéy 54 Zł: niż B.
C, má dwa razy tylé, ilé A, i B, razém.
Summa maiątku tych trzech Osób iest 288 Zł: iléż má każdá zosobna?

Arytmetycznie. Ponieważ C, má tylé dwoie, ilé A, i B, razém; więc summa maiątków A, B, C, iest trzy razy większá od summy maiąt-

 ków

kòw A, i B: a zatém ſumma maiątków A, i B, będzie trzecią częścią Zł: 288, toieſt będzie 96 Zł. Stąd podobnie, iak wyżéy, doyśdź można maiątku A, i B.

A, má więcéy 144 Zł: niż B.
C, má trzy razy tylé, ilé A, i B, razém.
Summa maiątku tych trzech Oſób, ieſt 600 Zł: iléż má każdá z oſobna?

20. *Zadanié 9. Dwie Oſoby A, i B, oddaloné na mil 96, iadą ku ſobie, i naoſtatek ſpotykaią ſię z ſobą. Piérwſzá uiéżdżá na dzićń mil 7, a drugá mil 5, w iléż dni ſpotkaią ſię z ſobą, i ilé mil uiedzie przed ſpotkaniém ſię każdá z tych Oſób w ſzczególności?*

Arytmetycznie. A, i B, przybliżaią ſię do ſiebie co dzićń ſummą mil 7, i 5, toieſt milami 12: więc tylé dni do ſiebie iadą, ilé razy powtórzyć trzeba mil 12, aby tak powtórzoné uczyniły mil 96. Znaydziémy zatém liczbę dni ich iazdy, dzieląc 96 przez 12, a ta będzie 8. W ośmiu tedy dniach zjadą ſię z ſobą.

Piérwſzá Oſoba w tych dniach 8 uiedzie mil	56.
Drugá Oſoba w tych dniach 8 uiedzie mil	40.
Obiedwie razém w tych 8 dniach uiadą mil	96.

Algiebraicznie. Mian: Dni iazdy A, i B . . . . . x.
Oſoba A, uiechała mil . . . . . $7x$.
. . . . B, uiechała mil . . . . . $5x$.
Mile od A, i B, uiechané . . . $12x$.

Warunek. $12x = 96$.

Przerábiánié. (Podzieliwſzy przez 12 z obu ſtrón) $1x = 8$.

Rozwiązanié. $1x = 8$. Dni iazdy.
$7x = 56$. Mile iazdy A.
$5x = 40$. Mile iazdy B.
$12x = 96$. Mile iazdy A, i B.

Inſzé przykłady. A, uiéżdżá na dzićń mil 6, B, mil 8: oddaloné ſą przed zaczęciém drogi na mil 126.

A, uiéżdżá

A, uieżdża na dzień mil 7, B 8: oddalené są przed tą podróżą na mil 135.

Pewná Osoba kupuie dwoiakiégo gatunku sukna w równéy liczbie łokci: iednégo łokieć płaci po Zł: 12, a drugiégo po Zł: 15. Za wszystko zaś wyliczyła Zł: 378: iléż łokci wzięła tego sukna?

21. *Przestroga.* Droga przez iednę ze dwóch Osòb uiechaná, iest w piérwszym przykładzie 7 mil, tylé razy wzięté, ilé dni iechała taż Osoba: powinnaby więc ta droga bydź oznaczoná przez razy x wzięté 7 mil, czyli przez $x7$. Ale że liczba ze dwòch inszych rozmnożoná, taż sama wypádá, ktòrąkolwiek z nich weźmiémy za mnożnika, lub mnożnégo, przeto zgodzono się, aby piérwszy zawsze kłaśdź znak liczebny, a drugi literalny liczbę także oznaczaiący, gdy takich dwóch znakòw mnożénié wyrazić chcemy. I tak, nie pisze się $x7$, ale $7x$. Tén piérwszy znak 7, nazwać można *Spółczynnikiém* (Coefficiens) znaku literalnégo x. Spółczynnik wyráżá zawsze, ilé razy wziętá iest ilość literalná, iak tu *np:* x.

22. *Zadanié 10. Złodziéy uciekaiący ubiegá na dzień mil 5. Pogoń w 8 dni po ucieczce za nim wystaná, uieżdżá na dzień mil 7: za iléż dni dogoni złodzieia Pogoń, i iak wielé mil uydzie złodziéy, nim będzie dogoniony?*

Arytmetycznie. Ponieważ złodziéy 8 dniami wymknął się przed Pogonią, a 5 mil na dzień ubiegá; więc w 8 dniach ubiegł mil 40. Pogoń, ktòrá co dzień 2 mile więcéy uieżdżá od złodzieia, przybliżá się téż co dzień do niego dwòma milami. A że ta Pogoń má się ze wszystkiém przybliżyć 40 milami do złodzieia, więc liczba dni iazdy pogoni tylá bydź powinna, ilé razy rozmnożoné 2 mile uczynią mil 40: ta zaś liczba iest 20: więc 20 dni trzeba pogoni, aby złodzieia doścignęła.

Dni iazdy pogoni . . . . 20.

Mile od Pogoni uiechané . . . . 20 razy 7, to iest 140.

– Dni uciekania złodzieia . . 28.

Mile od złodzieia ubieżoné . . . 28 razy 5, toiest 140.
Więc po tylu dniach złodziéy będzie dogoniony.

Algiebraicznie. Mian: Dni ścigania złodzieia . . . x.
Dni uciekania złodzieia. . . $x + 8$.

Mile

Mile ścigaiącégo . . . . . $7x$.
Mile uciekaiącégo . . . . $5x + 40$.

Warunek. $7x = 5x + 40$.

Przerábianié. (Odiąwſzy $5x$ z obu ſtròn) $2x = 40$.
(Podzieliwſzy przez 2) $1x = 20$.

Rozwiązanié. $1x = 20$. Dni ścigania.
$x + 8 = 28$. Dni uciekania.
$7x = 140$. Mile ścigaiącégo.
$5x + 40 = 140$. Mile uciekaiącégo.

Sprawdzénié. Tylé mil ubiégł złodziéy, ilé i pogoń z mieyſca ucieczki.

Inſzé przykłady. *Złodziéy ubiega 6 mil na dzién,*
Pogoń ubiegá 9 mil na dzién.
Złodziéy 12 dniami uſzedł przed pogonią.

Kupuie kto pewną liczbę łokci ſukna iednégo gatunku po Zł: 15. Kupuie drugiégo gatunku, więcéy 8 łokci niż piérwſzégo, po Zł: 11: tylé ze wſzyſtkiém płaci za piérwſzé ſukno, ilé za drugié: iakże wielé łokci wziął z każdégo gatunku?

23. *Zadanié 11. Pewná Oſoba wybrała ſobie dwie materye, z których iednę chce kupić. Łokieć iednéy z tych materyy ieſt po Zł: 15, a drugiéy po Zł: 18. Jeżeli kupi piérwſzéy tylé łokci, ilé iéy potrzeba, zoſtanie iéy Zł: 24: ieżeli zaś tyléż łokci kupi drugiéy, zoſtanie iéy tylko Zł: 3. Iléż łokci chciała kupić, i ilé miała piéniędzy?*

Arytmetycznie. Ponieważ téy oſobie w piérwſzym razie, zoſtałoby ſię 24 Zł: a w drugim tylko 3 Zł; więc w drugim razie wydałaby 21 Zł: więcéy, niż w piérwſzym, a to dlá tego, że każdy łokiéć drugiéy materyi płaciłaby 3 złotémi drożéy, niż łokieć piérwſzéy. Więc trzy złoté tylé razy wzięté, ilé ta oſoba kupiłaby materyi łokci, czynią Zł: 21, a iedén złoty wzięty tylé razy, ilé má bydź kupionych łokci, uczyni trzecią część Zł: 21, toieſt 7 Zł: chciała tedy ta oſoba kupić łokci 7.

Liczba łokci . . . . 7.
Zapłata za łokci 7 piérwszéy materyi Zł: . . . . . 105.
Zapłata za łokci 7 drugiéy materyi . . . . 126.
Miała ta Osoba piéniędzy Zł: 105 + 24 = 129, albo . . . .
. . . 126 + 3 = 129.

Algiebraicznie. Mianowanie. Liczba łokci . x.
Zapłata całá za piérwszy gatunek . $15x$.
Zapłata całá za drugi gatunek . $18x$.
Maiątek téy Osoby . . . . $15x + 24$, albo $18x + 3$.

Warunek. $18x + 3 = 15x + 24$.

Przeráb: (Odiąwszy 3 z każdéy strony) $18x = 15x + 21$.
(Odiąwszy $15x$ z każdéy strony) $3x = 21$.
(Podzieliwszy przez 3) . . . . $x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$. Liczba łokci.
$15x = 105$. Zapłata za 7 łokci piérwszéy materyi.
$18x = 126$. Zapłata za 7 łokci drugiéy materyi.
$15x + 24 = 129$. Liczba Zł: Osoby kupuiącéy.
$18x + 3 = 129$. Też sama liczba.

Sprawdz: Dwa wyrażénia maiątku téy Osoby są równé.

Inszé przykłady. Kupuiąc pewną liczbę łokci iednéy materyi po Zł: 17, a drugiéy po Zł: 13, zostaie się Osobie kupuiącéy w piérwszym razie Zł: 15, a w drugim Zł: 47.

Dwie Osoby razém naprzeciwko siebie wyieżdżaią: iedna ieżdżá na dzién mil 8, a drugá mil 5. Gdy się z sobą spotykaią piérwszá uiechała mil 24 więcéy niż drugá.

Naięto pewną liczbę robotników, i obiécano każdému po gr. 15: inszym zaś robotnikóm, których tylé było, ilé piérwszych obiécano po gr. 12. Wzięli piérwsi razém 27 gr. więcéy niż drudzy.

Inszą znowu razą naięto także pewną liczbę robotników: gdyby im płacono po gr. 12, iészczeby nie dostawało naymuiącému gr. 25: gdy zaś każdému tylko płacić będzie po gr. 9, zostanie mu gr. 35. Iléż naymuie robotników, i ilé má piéniędzy?

C W tym

W tym oſtatnim przykładzie, ponieważ Oſobie naymuiącéy robotników w piérwſzym razie nie doſtáwałoby gr. 25, a w drugim zbywałoby gr. 35; więc w piérwſzym razie muſiałaby ta Oſoba płacić 25, i 35 gr. toieſt 60 gr. więcéy niż w drugim. Co oprócz wielu innych ſpoſobòw, można i tak okázać.

Fig. 1. Niech liniiá AB, oznáczá maiątek téy Oſoby. Ponieważ w piérwſzym razie więcéyby iéy 25 gr. nad maiątek zapłacić przychodziło, niech więc liniia AC, większá od AB, liniią BC, wyrážá tę całą zapłatę, a różnica BC tych dwóch liniy niech wyrážá 25 gr.

W drugim zaś razie, gdzieby mniéy ta Oſoba zapłacić miała, niech to wyrážá liniiá AD, mnieyſzá od AB, liniią BD, a zatém niech liniiá BD, wyrážá 35 gr. A że liniiá AC, przewyżſza liniią AD, ſummą liniy BC, BD, toieſt liniią CD, więc téż i wydatek piérwſzy téy Oſoby przewyżſzáłby wydátek drugi ſummą 25, i 35 gr. toieſt 60 gr.

Poſtępuiąc ſobie Algiebraicznie, nazwalibyśmy liczbę robotników x, całą ich zapłatę w piérwſzym razie $12x$, a w drugim $9x$. Dlá oznaczénia zaś maiątku téy Oſoby w piérwſzym razie, odięlibyśmy 25 gr. od $12x$: w drugim dodalibyśmy 35 gr. do $9x$. Maiątek więc téy Oſoby takby ſię wyraził: $12x - 25$ (znak — kładzie ſię przed tą ilością, która ſię od innéy má odiąć, i wymáwiá ſię *mniéy*) albo tak: $9x + 35$. Lubo dalſzé poſtępowanie nic w ſobie trudnégo nie zamyká, nie zawadzi iednak tu ié wyłożyć.

Warunek. $12x - 25 = 9x + 35$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 25 po obu ſtronach)

$$12x = 9x + 60.$$

(Odiąwſzy $9x$ po obu ſtronach)

$$3x = 60.$$

(Podzieliwſzy przez 3 obie ſtrony)

$$x = 20.$$

24. *Zadanié 12. Maiątki trzech Oſób A, B, C, ſą takié, że*

Summa Maiątków A, i B, czyni . . . . *Zł: 24.*
. . . . *A, i C, czyni* . . . . *28.*
. . . . *B, i C, czyni* . . . . *36.*

Ileż má każdá z tych Oſób w ſzczególności?

Arýtme-

Arytmetycznie. *Sposób 1.* Gdy do maiątku A, dodámy osobno maiątki B, i C, będzie summa za drugą razą większá 4 Zł: niż za piérwszą, a zatém C, má więcéy 4 Zł: niż B: a że B, wráz z C, má Zł: 36; więc maiątek C, większy iest 2 Zł: od 18, a maiątek B, mnieyszy iest 2 Zł: od Zł: 18.

Má tedy C, Zł: 20, a B, Zł: 16: że zaś A, i B, maią razém Zł: 24; więc A, má Zł: 8.

Maiątek A . . . . 8 Zł.
. . . . . B . . . 16.
. . . . . C . . . 20.

Sposób 2. Máiątek A, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 24, i 28.

Maiątek B, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 24, i 36.

Maiątek C, wchodzi we dwie wiadomé summy: . . . . 28, i 36;

a zatém summa maiątku trzech Osób A, B, C, dwa razy wziętá, równá iest summie liczb, 24, 28, 36, poiedynczo wziętéy, to iest 88. Summa więc maiątków A, B, C, iest połową summy liczb 24, 28, 36, toiest połową 88, czyli 44.

Że zaś B, i C, maią razém 36 Zł: więc A, má 8 Zł.
A, i C, maią razém 28 Zł: więc B, má 16.
A, i B, maią razém 24 Zł: więc C, má 20.

Algiebraicznie. Między inszémi sposobami, następuiący zdaie się bydź w rozwięzywaniu podobnych zadáń náyogólnieyszym, w ktòrym od mianowania summy maiątku trzech Osòb, zaczynámy.

Mianowanié. Summa trzech maiątków . . . x.
Maiątek A . . . . . . $x - 36$.
B . . . . . . $x - 28$.
C . . . . . . $x - 24$.

Warunek może bydź czworako wyrażony. Bo albo możná go ztąd wywieśdź, że summa trzech wyrażéń maiątkòw szukanych, powinnaby bydź ròwną summie oznaczonéy przez x; albo ztąd, że summa dwòch wyrażéń tych

tych maiątków powinna bydź równą summie danéy. Weźmy *np.* tén warunek, że summa maiątków A, i B, powinna bydź równą 24 Zł. Summa maiątków A, i B, iest . . . . $2x - 64$.

Warunek. $2x - 64 = 24$.

Przerábianié. (Dodáwszy 64 po obudwóch stronach) $2x = 88$.
(Podzieliwszy przez 2 obiedwie strony) $x = 44$.

Rozwiązanié. $x = 44$. Summa trzech maiątków.
$x - 36 = 8$. Maiątek A.
$x - 28 = 16$. Maiątek B.
$x - 24 = 20$. Maiątek C.

Sprawdzénié. Té trzy liczby 8, 16, 24, czynią zadosyć trzém warunkóm podanym.

Inszé przykłady. 1mo. *A, i B, maią razém . . . 32 Zł.*
A, i C, ... 37.
B, i C, ... 45.

2do. *A, i B, maią razém . . 49.*
A, i C, ... 57.
B, i C, ... 64.

25. *Zadanié 13. Maiątek między cztérema osobami A, B, C, D, iest taki, że*

Summa Maiątków A, B, C . . . 36.
A, B, . . D. 42.
A . . . C, D. 47.
B, C, D. 52.

Iléż má każdá z tych Osób w szczególności?

Arytmetycznie. Podobnie, iak wyżéy, rozumuiąc, dochodzimy, iż summa tych maiątków cztérech niewiadomych trzy razy wzięta, równá się summie poiedynczéy cztérech liczb danych, toiest liczbie 177. Więc summa poiedynczá cztérech maiątków niewiadomych, równá iest trzeciéy części liczby 177, toiest 59: a zatém maiątki szczególné Osób A, B, C, D, będą różnicą

różnicą między tą liczbą 59 i liczbami 52, 47, 42, 36, osobno wziętémi: téini zaś różnicami są liczby . . . . 7, 12, 17, 23.

Algiebraicznie. Mian: Summa Maiątków . . . x.
Maiątek A . . . . . $x - 52$.
B . . . . . $x - 47$.
C . . . . . $x - 42$.
D . . . . . $x - 36$.
Summa 4 Maiątków . $4x - 177$.

Warunek. $4x - 177 = x$.

Przerób: (Dodáwszy 177 po obu stronach)
$4x = x + 177$.
(Odiąwszy $1x$ po obu stronach)
$3x = 177$.
(Podzieliwszy przez 3 obiedwie strony)
$1x = 59$.

Rozwiązanié. $x = 59$.
$x - 52 = 7$. Maiątek A.
$x - 47 = 12$. Maiątek B.
$x - 42 = 17$. Maiątek C.
$x - 36 = 23$. Maiątek D.

Insze przykłady. Maiątek między 5 Osobami A, B, C, D, E, iest taki, że

Summa Maiątków: A, B, C, D . . . iest . . . 16.
A, B, C, . . E . . . . . . 18.
A, B, . . D, E . . . . . . 23.
A, . . C, D, E . . . . . . 25.
. . B, C, D, E . . . . . . 26.

Maiątek między 6 Osobami, A, B, C, D, E, F, iest taki, że

Summa maiątków A, B, C, D, E . . . iest . . . 24.
A, B, C, D, . . F . . . . . . 28.
A, B, C, . . E, F . . . . . . 31.
A, B, . . D, E, F . . . . . . 33.
A . . . C, D, E, F . . . . . . 34.
. . B, C, D, E, F . . . . . . 35.

26. *Zadanié 14. A, má 60 Zł. B, má 20 Zł. A, tylé zyſkuie co i B: zyſkáwſzy zaś iednakową ſummę; A, mieć tylko będzie tylé dwoie, co B: iléż zyſkuią?*

Arytmetycznie. Ponieważ A, przed zyſkiém tylé troie má co B, przed zyſkiém; więc iakążkolwiek byłaby ta ſumma którą zyſkuie B, ieżeli A, chce mieć zawſze tylé troie co B, trzeba iéy téż zyſkać tylé troie, ilé zyſkuie B: a że podług zadania, A, zyſkuie tylé tylko, ilé B, niedoſtáwać iéy ieſzcze będzie tylé dwoie zyſku B, aby miała wráz z tym zyſkiém, trzy razy tylé, ilé má B, wráz także z zyſkiém. Więc zyſk B, dwa razy wzięty równá ſię maiątkowi B, wráz z zyſkiém ráz wziętym. A że maiątek B, z zyſkiém ſkłádá ſię z piérwiaſtkowégo maiątku 20 Zł. i z zyſku; więc zyſk B, dwa razy wzięty, równy ieſt ſummie z 20 Zł. i z zyſku ráz wziętégo: a zatém zyſk B, który má bydź taki, iak i zyſk A, ieſt 20 złotych.

I tak A, mieć będzie z zyſkiém . . . 80 Zł.
B, mieć będzie z zyſkiém . . . 40.
80, ieſt 2 razy tylé, ilé 40.

Algiebraicznie. Mianowanié. Zyſk każdéy oſoby . . x.
Maiątek B, wráz z zyſkiém . . $20 + x$.
Maiątek A, wráz z zyſkiém . . $60 + x$.
albo . . . . . . $40 + 2x$.

Warunek. $40 + 2x = 60 + x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 40 po obu ſtronach)
$2x = 20 + x$.

(Odiąwſzy x po obu ſtronach)
$1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$. Zyſk ſzukany.
$20 + x = 40$. Maiątek B, z zyſkiém.
$60 + x = 80$. Maiątek A, z zyſkiém.
$40 + 2x = 80$. Drugié wyrażénié maiątku A, z zyſkiém.

Sprawdzénié. Dwa wyrażénia maiątku A, z zyſkiém ſą równé.

Inſzé

Inszé przykłady. *Oyciec ma lát 54, Syn 18: za iléż lát Oyciec dwa razy tylko starszy będzie od Syna?*

A, má 50 Zł: B, má 18 Zł: iakąż summę maią iednakową zyskać, aby zyskawszy ią, maiątek A, był tylko tylé dwoie, tak wielki, iak maiątek B?

Sposób dochodzénia Algiebraiczny ténże sám iest co wyżéy. Arytmetycznie zaś chcąc dochodzić rozwiązania, następuiący sposób wygodnieyszy iest od poprzedzaiącégo w tych przypádkach, gdzie piérwszy maiątek A, nie zawiéráłby w sobie maiątku piérwszégo B, kilka zupełnych razy.

Maiątek piérwszy A, zawiérá w sobie maiątek B, razy 2, i ieszcze 14 Zł: zostaie. A że po iednakowym zysku, A, má mieć dwa razy tylé, ilé B; więc summa z 14 Zł: i tego zysku powinna bydź 2 razy taká, iak 14, a zatém zysk iednakowy obudwóch Osób, będzie 14 Zł:

To rozumowanié może bydź obiaśnioné, wyrážaiąc maiątki i zyski przez liniie. Niech liniiá AB, wyrážá maiątek A, toiest Zł: 50, a liniiá CD, maiątek B, toiest Zł: 18. Fig. 2.

Weźmiymy na linii AB, część AF, dwa razy tak wielką, iak iest CD. Niech znowu liniiá DZ równá linii BX, oznaczá zysk iednakowy.

Cała liniiá AX, będzie dwa razy tak wielká, iak liniiá CZ: a że część AF, iest dwa razy tak wielká, iak liniiá CD; więc téż i liniiá FX, musi bydź dwa razy tak wielká iak DZ, albo BX, a zatém linie BF, BX, są równé.

27. *Zadanié 15. A, má trzy razy tylé, ilé B: B, bierze od A, Zł: 12, i má potém połowę tylé, ilé A.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był iednostaynie większy razy trzy od maiątku B, tedy ieżeli B, zyskuie Zł. 12, zysk A, powiniénby téż bydź Zł: 36.

A że A, zamiást zyskania złotych 36, traci złotych 12, więc nie dostaie ieszcze do tego złotych 48, aby maiątek A, był trzy razy tak wielki, iak iest maiątek B, po nabytych złotych 12. Má zaś A, udzieliwszy złotych 12 dlá B, tylko dwa razy tylé, ilé B zyskáwszy złotych 12, więc nie dostaie Osobie A, maiątku Osoby B, wráz z zyskiém, aby miała trzy razy tylé, ilé B, i z tym zyskiém, toiest, nie dostaie iéy Zł: 48: a zatém maiątek Osoby B, wráz z zyskiém iest złotych 48, a przed zyskiém był Zł: 36.

Maiątek 1wszy	B	. . . . 36.	Zł.
Maiątek 1wszy	A	. . . 108.	
Maiątek 2gi	B	. . . . 48.	
Maiątek 2gi	A	. . . . 96.	

Algie-

Algiebraicznie. Mia: Maiątek 1wfzy B . . . . *x.*
Maiątek 1wfzy A . . . . *3x.*
Maiątek 2gi B . . . . $x + 12$.
Maiątek 2gi A . . . . $3x - 12$.
albo . . . . $2x + 24$.

Warunek. $3x - 12 = 2x + 24$.

Przérábianié (Dodáwfzy 12 po obu ftronach)
$3x = 2x + 36$.
(Odiąwfzy $2x$ po obu ftronach)
$1x = 36$.

Rozwiązanié. $1x = 36$. Maiątek 1wfzy B.
$3x = 108$. Maiątek 1wfzy A.
$x + 12 = 48$. Maiątek 2gi B.
$3x - 12 = 96$. Maiątek 2gi A.
albo $2x + 24 = 96$. Maiątek 2gi A.

Sprâwdzénié. Dwa wyrażénia drugiégo maiątku A, fą równé.

Infzé przykłady. A, má trzy razy tylé, ilé B: A, zyfkuie od B, Zł: 20, i ma potém 5 razy tylé, ilé B.

Chcąc z łatwością rozwiązać arytmetycznie to Zadanié, trzeba ié tak uważać, iak gdyby wyrażoné było w fpofób naftępuiący: *A, má 5 razy tylé, ilé B: B, zyfkuie od A, Zł: 20, i potém A, má tylko trzy razy tylé, ilé B.*

A, má 5 razy tylé, ilé B: A, traci Zł: 20. B, zyfkuie Zł: 36: potém A, má tylko trzy razy tylé, ilé B.

28. *Zadanié 16. A, má Zł: 60. B, má Zł: 15, A, zyfkuie dwa razy tylé, ilé B, i potém má tylko trzy razy tylé, ilé B.*

Arytmetycznie. Spofób 1. Aby maiątek A, był iednoftaynie 4 razy tak wielki, iak ieft maiątek B, trzeba aby zyfk A, był 4 razy tak wielki, iak ieft zyfk B. Ze zaś A, zyfkuie tylko 2 razy tylé, ilé B; więc nie doftaie ieszcze 2 razy zyfku B, aby maiątek A, potym zyfku był 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zyfku. Ze znowu A, po zyfku fwoim má tylko trzy razy tylé, ilé B; więc Maiątkowi A, po zyfku, nie doftaie maiątku B, po zyfku do tego, aby ténże maiątek A, był po zyfku 4 razy tak wielki, iak maiątek B, także po zyfku: a zatém zyfk B, dwa razy wzięty, wyrównywá maiątkowi

maiątkowi B, z zyſkiém ráz wziętym; więc maiątek B, równá ſię zyſkowi B, toieſt B, zyſkuie Zł. 15.

Zyſk B Zł. . . . 15.
Zyſk A . . . . . 30.
Maiątek B z zyſkiém Zł. . . . 30.
Maiątek A z zyſkiém . . . . . 90.

Spoſób 2. mogący ſię ogólniéy przyſtóſować. Niech liniiá AB, i CD, Fig. 3. oznáczaią piérwſzé maiątki A, i B: B wyráżá zyſk B, którégo ſzukámy: BX dwa razy tak wielká, iak DY będzie wyráżała zyſk A. Weźmy AE, trzy razy większą od CD. Ponieważ AX, powinna bydź trzy razy większá od CY, a część AE, ieſt trzy razy większá od części CD; więc EX, będzie téż trzy razy większą od DY. Wziąwſzy BZ = XZ = DY, będzie EX trzy razy większą od XZ, a EZ, dwa razy większą od XZ, albo od BZ: a zatém EB = BZ. Przeto zyſk B, równá ſię linii EB, albo CD, toieſt 15 Zł.

Algiebraicznie. Mianowanié. Zyſk B . . . . x.
Zyſk A . . . . $2x$.
Maiątek B, po zyſku . . . . $15 + x$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $60 + 2x$.
albo . . . . $45 + 3x$.

Warunek. $45 + 3x = 60 + 2x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy $2x$ po obu ſtronach) $45 + 1x = 60$.
(Odiąwſzy 45 po obu ſtronach) . . . $1x = 15$.

Rozwiązanié. $x = 15$. Zyſk B.
$2x = 30$. Zyſk A.
$15 + x = 30$. Maiątek B, po zyſku.
$60 + 2x = 90$. Maiątek A, po zyſku.
albo $45 + 3x = 90$. Maiątek A, po zyſku.

Sprdwdzénié. Dwa wyrażénia maiątku A, po zyſku ſą równé.

Inſzé przykłady. A, má Zł: 100, B, má Zł. 60. A, zyſkuie 3 razy tylé, ilé B, i potém má dwa razy tylé, ilé B.

A, má Zł: 220. B, má Zł. 80: B, zyſkuie 2 razy tylé ilé A, potém A, má tylko 2 razy tylé, ilé B.

D 29. *Za-*

29. *Zadanié 17. A, má Zł. 60, B, má Zł. 42: iléż A, má zyſkać od B, gdy chce miéć 2 razy tylé, ilé B.*

Fig. 4. Użycié linii ułatwiá i tu rozwiązanié, ſpoſobém rozumowania.

Niech liniiá AB, oznáczá piérwſzy maiątek A, 60: a liniiá CD, niech oznáczá piérwſzy maiątek B, 42. Zróbmy linią AE, dwa razy tak wielką, iak CD, i niech liniie równé BX, DY, zyſk A, a ſtratę B, wyrázaią. Ponieważ AE, dwa razy tak ieſt wielká iak CD, a iéy część AX, powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY; więc i drugá część EX, powinna bydź dwa razy tak wielká iak DY, albo BX: a zatém liniiá EB, powinna bydź trzy razy tak wielká iak BX, toieſt liniiá BX, powinna bydź trzecią częścią linii EB: że zaś AE, oznácza 84, AB, oznáczá 60, więc BE, oznáczać będzie 24: a zatém liniiá BX, oznáczá 8.

Maiątek B, po ſtracie . . . . $42 - 8 = 34$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $60 + 8 = 68$.

Algiebraicznie. Mian: Zyſk A, lub ſtrata B . . . . . . x.
Maiątek B, po ſtracie . . . $42 - x$.
Maiątek A, po zyſku . . . $60 + x$.
albo . . . . $84 - 2x$.

Warunek. $60 + x = 84 - 2x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $2x$ po obu ſtronach) $60 + 3x = 84$.
(Odiąwſzy 60 po obu ſtronach) . . . $3x = 24$.
(Obie ſtrony podzieliwſzy przez 3) . $1x = 8$.

Rozw: $x = 8$. Zyſk A, lub ſtrata B.
$42 - x = 34$. Maiątek B, po ſtracie.
$60 + x = 68$. Maiątek A, po zyſku.
$84 - 2x = 68$. Drugié wyrażénié maiątku A, po zyſku.

Inſzé przykłady. A, má Zł. 100: B, má Zł. 170: iléż B, má zyſkać od A, gdy chce mieć 2 razy tylé ilé A?

A, má Zł. 120, B, má Zł. 55. A, zyſkuie tylé dwoie, ilé B traci, i mieć potém będzie 3 razy tylé, ilé B.

30. *Zadanié 18.* A, má Zł. 100, B, má Zł. 70. A, tylé traci, ilé B, má iednak potém A, tylé dwoie, ilé B.

Fig. 5. *Arytmetycznie.* Niech liniiá AB, oznáczá Zł. 100, toieſt maiątek A, i niech liniiá CD, oznáczá Zł. 70, toieſt maiątek B. Niech liniie równé BX,

BX, DY, wyrázaią ſtraty A, i B: i niech AE, dwa razy tak wielká będzie, iak CD.

Ponieważ AE, dwa razy ieſt tak wielká, iak CD, a zaś AX powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY; więc i EX, muſi bydź dwa razy tak wielká iak DY, albo BX: a zatém liniie EB, BX, powinny bydź równé. A że AE oznácza 140, AB, oznácza 100; więc EB, albo BX, oznáczać będzie 40.

Strata równá . . A, i B . . . . 40.
Maiątek A, po ſtracie . . . . . 60.
Maiątek B, po ſtracie . . . . . 30.

Algiebraicznie. *Mianowanié.* Strata A, albo B . . . . x.
Maiątek B, po téy ſtracie . $70 - x$.
Maiątek A, po téy ſtracie . $100 - x$.
albo . . . . $140 - 2x$.

Warunek. $100 - x = 140 - 2x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $2x$ po obu ſtronach) $100 + x = 140$.
(Odiąwſzy 100 po obu ſtronach) . . $x = 40$.

Rozwiązanié. $x = 40$. Strata A, lub B.
$70 - x = 30$. Maiątek B, po ſtracie.
$100 - x = 60$. Maiątek A, po ſtracie.
$140 - 2x = 60$. Drugié wyrażénié maiątku A, po ſtracie.

Inſzé przykłady. A, má 120 Zł. B, má 90 Zł. B, traci tylé dwoie, ilé A, po któréy ſtracie zoſtaie ſię dlá A, tylé dwoie, ilé dlá B.

A, má 120 Zł. B, má 90 Zł. A, traci tylé dwoie, ilé B, po któréy ſtracie zoſtaie ſię dlá B, tylé dwoie, ilé dlá A.

31. *Uwága.* We dwóch oſtatnich zadaniach, aby znaleźć drugié wyrażénié maiątku A, trzeba było wziąć dwa razy wyrażénié maiątku B, złożoné ze dwóch części, z których iedna miała przed ſobą znak — I tak w zadaniu 17. trzeba było wziąć dwa razy ilość $42 - x$, a w zadaniu 18, trzeba było wziąć dwa razy ilość $70 - x$. Ilości tak rozmnożoné były $84 - 2x$, i $140 - 2x$. Przy téy okoliczności przytoczymy tu, i rozbiérać będziémy różné przykłady rozmnożénia, w których ilość mnożyć ſię maiąca, kładzie ſię ze znakiém odéymowania.

 Niech

Niech będzie ilość $42 - x$, którą dwa razy wziąć potrzeba, czyli rozmnożyć przez 2.

Ilé razy przyſzłoby brać 42, tylé razy trzebaby téż odiąć x: a że 42 bierze ſię 2 razy; więc téż trzeba odiąć x, 2 razy: a zatém ilość tak rozmnożoná, będzie $84 - 2x$.

Toż ſamo rozumowanié przyſtóſować możná i do wſzyſtkich inſzych przypádków.

Możné.	$12 - x$.	$13 - x$.	$7 - x$.	$15 - x$.	$16 - x$.	$18 - x$.
Mnożniki.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Wieloczyny.	$36 - 3x$.	$52 - 4x$.	$35 - 5x$.	$90 - 6x$.	$112 - 7x$.	$144 - 8x$.

W drugim i w trzécim przykładzie Zadania 18, ilość niewiadomá, którą mnożyć przypádá, kładzie ſię z Spółczynnikiém.

Z powodu tego zdarzénia, wyłożymy ieſzcze na różnych przykładach i regułę mnożénia względém Spółczynników.

Jeżeli ilość $2x$ weźmie ſię dwa razy; ilością rozmnożoną będzie ſumma, z $2x$ i z $2x$, toieſt $4x$. Jeżeli weźmiémy $2x$ razy trzy, ilością rozmnożoną będzie trzy razy dwa x, albo 6 razy x, toieſt $6x$. tak, iak 2 złoté wzięté razy trzy, czynią 6 Zł. A w ogólności mówiąc, aby rozmnożyć ilość maiącą Spółczynnika, przez liczbę cáłkowitą, trzeba tylko aby ſám Spółczynnik téy ilości był rozmnożony przez tęż liczbę cáłkowitą.

PRZYKŁADY.

Mnożne.	$2x$.	$3x$.	$4x$.	$5x$.	$6x$.	$7x$.	i t. d.
Mnożniki.	3.	5.	6.	7.	8.	9.	
Wieloczyny.	$6x$.	$15x$.	$24x$.	$35x$.	$48x$.	$63x$.	i t. d.
Mnożné.	$6+2x$.	$8+3x$.	$5+4x$.	$7+8x$.	$11+9x$.		i t. d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.		
Wieloczyny.	$12+4x$.	$24+9x$.	$20+16x$.	$35+40x$.	$66+54x$.		i t. d.
Mnożné.	$3x-5$.	$4x-6$.	$5x-7$.	$8x-9$.	$10x-12$.		i t d.
Mnożniki.	2.	3.	4.	5.	6.		
Wieloczyny.	$6x-10$.	$12x-18$.	$20x-28$.	$40x-45$.	$60x-72$.		i t. d.

Mnożné.	*12 — 2x.*	*12 — 3x.*	*15 — 4x.*	*20 — 5x.*	*28 — 6x.*	i t. d.
Mnożniki.	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	
Wieloczyny.	*36 — 6x.*	*48 — 12x.*	*75 — 20x.*	*120 — 30x.*	*196 — 42x.*	i t. d.

32. *Zadanié 19. Jeżeli tak A, iak i B, zyſká Zł. 12; A, mieć będzie dwa razy tylé, ilé B. Jeżeli zaś tak A, iak i B, ſtraci Zł. 12; A, mieć będzie trzy razy tylé, ilé B. Iléż tak A, iak i B, má przed tym zyſkiém, i po zyſku: i ilé tak A, iak i B, mieć będzie przed tą ſtratą, i po ſtracie?*

Arytmetycznie. A, zyſkáwſzy 12 Zł. má 24 Zł. więcéy, niż ſtraciwſzy 12 Zł. B, także zyſkáwſzy 12 Zł. má 24 Zł. więcéy, niż ſtraciwſzy 12 Zł. Ponieważ A, w powtórnym ſtanie maiątku, trzy razy má tylé, ilé B; więc aby i w piérwſzym ſtanie maiątek A, był trzy razy tak wielki, iak maiątek B; trzebaby mieć A, po zyſku 3 razy 24, czyli 72 Zł. więcéy, niżeli má po ſtracie. Ze zaś po zyſku má tylko 24 złote więcéy niż po ſtracie; więc ieſzcze brakuie A, po zyſku Zł. 48 do tego, aby maiątek A, po tymże zyſku, był 3 razy tak wielki iak maiątek B. Má zaś w ſaméy rzeczy A, po zyſku, tylko dwa razy tylé, ilé B: więc ieſzcze nie doſtaie A, maiątku B, ráz wziętégo, aby po zyſku był trzy razy tak wielki maiątek A, iak maiątek B. Więc maiątek B, po zyſku, ieſt 48 Zł: a zatém przed zyſkiém, B, má 36 złotych.

Maiątek B, po zyſku . . . . . 48 złotych.
Piérwſzy maiątek B . . . . . . 36.
Maiątek B, po ſtracie . . . . 24.

Maiątek A, po zyſku . . . . . . 96. złotych.
Piérwſzy maiątek A . . . . 84.
Maiątek A, po ſtracie . . . . . . 72.

To rozumowanié obiaśnić możná podobnie iak wyżéy na liniiach.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B, po ſtracie . . . . x.
Maiątek B, przed ſtratą . . . $x + 12$.
Maiątek B, po zyſku . . . . $x + 24$.
Maiątek A, po ſtracie . . . . $3x$.
Maiątek A. przed ſtratą . . . $3x + 12$.
Maiątek A, po zyſku . . . . $3x + 24$.
albo . . . . . . $2x + 48$.

Warunek $3x + 24 = 2x + 48$.

Prze-

Przeráb: (Odiąwszy 24 po obu stronach) $3x = 2x + 24$.
(Odiąwszy $2x$ po obu stronach) $1x = 24$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Maiątek B, po stracie.
$x + 12 = 36$. Maiątek B, przed stratą.
$x + 24 = 48$. Maiątek B, po zysku.

$3x = 72$. Maiątek A, po stracie.
$3x + 12 = 84$. Maiątek A, przed stratą.
$3x + 24 = 96$. Maiątek A, po zysku.
albo $2x + 48 = 96$. Drugié wyrażénié maiątku A, po zysku.

Inszé przykłady. Jeżeli tak A, iak B, zyská Zł. 12; A, mieć będzie 3 razy tylé, ilé B: ale ieżeli tak A, iak B, straci Zł. 12; A, mieć będzie cztéry razy tylé, ilé B.

Jeżeli A, zyská Zł. 12, a B, zyská Zł. 8, A, mieć będzie trzy razy tylé, ilé B: ale ieżeli A, traci Zł. 8, a B, traci Zł. 12. A, mieć będzie 5 razy tylé, ilé B.

33. *Zadanié 20. Zakłád między A, i B, iest o 12 Zł. ieżeli ié wygrá A, mieć będzie dwa razy tylé ilé B: ieżeli zaś wygrá B, tedy mieć tylé będzie, ilé A. Ileż má A, ilé B, przed wygraną, po wygranéy, lub po przegranéy*

Jeżeli wygrá A, tedy mieć będzie 24 złoté więcéy niż po przegranéy. Toż mówić i o B. Nie uwáżaiąc więc maiątków A, i B, iak tylko po wygranéy, i po przegranéy; Zadanié to odmiéniá się w inszé podobné Zadaniu 15, i możná ié tak wyłożyć:

Dwie osoby A, i B, równy maiątek posiádaią: A, zyskuie Zł. 24, któré traci B, potém A, má dwa razy tylé, ilé B.

Gdy B, traci Zł. 24, ieżeli i po téy stracie, A, má mieć tylé, ilé B; trzeba ażeby i A, straciła téż Zł. 24. Alé że A, zamiást stracénia Zł. 24, zyskuie ieszcze 24 złoté; więc A, po zysku má 48 Zł. więcéy niżby mieć powinna, gdyby tylko tylé miała, ilé B, po stracie.

Ze zaś w saméy rzeczy A, má po zysku dwa razy tylé, ilé B; więc tén maiątek A, przewyższá maiątek B, tymżé maiątkiém B, raz wziętym: a zatém B, po stracie 24 Zł. má tylko 48. a przed stratą miała 72 złoté.

Wrácaiąc się do piérwszych Zadania tego wyrazów; będzie

Maiątek

Maiątek B, gdy zakład wygrá . . . . 72. złoté.
Maiątek B, przed zakładém . . . . . 60.
Maiątek B, gdy zakład przegrá . . . 48.

Maiątek A, gdy zakład przegrá . . . 72.
Maiątek A, przed zakładém . . . . . 84.
Maiątek A, gdy zakład wygrá . . . . 96.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek B, po wygranéy . . . x.
Maiątek B, przed zakładém . . $x - 12$.
Maiątek B, po przegranéy . . $x - 24$.

Maiątek A, po przegranéy . . . . x.
Maiątek A, przed zakładém . . . $x + 12$.
Maiątek A, po wygranéy . . . $x + 24$.
albo . . . . $2x - 48$.

Warunek. $2x - 48 = x + 24$.

Przerábianié. (Dodáwszy 48 po obu stronach) $2x = x + 72$.
(Odiąwszy x po obu stronach) $x = 72$.

Rozwiązanié. $x = 72$. Maiątek B, po wygranéy.
$x - 12 = 60$. Maiątek B, przed zakładém.
$x - 24 = 48$. Maiątek B, po przegranéy.

$x = 72$. Maiątek A, po przegranéy.
$x + 12 = 84$. Maiątek A, przed zakładém.
$x + 24 = 96$. Maiątek A, po wygranéy.

Inszé przykłady. Zakład między A, i B, iest o Zł. 20: ieżeli go A wygrá, tedy mieć tylé troie będzie, ilé B: ieżeli zaś wygrá B, tedy A, mieć tylko będzie tylé dwoie, ilé B.

Jeżeli A, wygrá Zł. 24, a B, przegrá Zł. 16, tedy A, mieć będzie 5 razy tylé, ilé B: ieżeli zaś B, wygrá Zł. 20, a A, przegrá Zł. 12, tedy A, mieć tylko będzie tylé troie, ilé B.

34. *Zadanié 21. Maiątki cztérech Osób, A, B, C, D, są takié, że A, więcéy má niż B, Zł. 40. C, więcéy niż D, Zł 60. A, trzy razy má tylé, ilé D, a C, dwa razy má tylé, ilé B. Jakiż iest każdéy z tych 4 Osób maiątek?*

Użycié

Fig. 6. Użycié liniy ułatwi rozwiązanié tego Zadania przez rozumowanié.

Niech liniie AB, CD, wyſtawuią nám liczby 40, i 60: niech liniié BX, DY wyſtawuią maiątki B, i D, a tém ſamém liniie AX, CY, niech wyſtawuią maiątki A, i C.

Liniiá CY, powinna bydź, podług zadania, dwa razy tylá, ilá ieſt BX. Wziąwſzy liniią BE, równą połowie linii CD, toieſt 30 złotych; liniiá EX, muſi téż bydź połową linii DY. A że AX, ma bydź trzy razy tak wielká, iak DY; więc AX, będzie 6 razy tak wielká, iak EX: a zatém AE, będzie w ſobie zamykała EX, 5 razy. Że zaś AE, równá ieſt ſummie AB, i BE, toieſt ſumma 30, i 40, czyli 70; więc EX, oznáczać będzie piątą część 70, toieſt 14, a zatém BX, oznaczy ſummę 30, i 14, toieſt 44. AX ſummę 40, i 44, toieſt 84 CY dwarazy tak wielká, iak BX, będzie oznáczać 88, a DY oznaczy mniéy 60 Zł: toieſt oznaczy 28.

Powtórzénié. Maiątek A . . . . . 84.
. . . . B . . . . . 44.
. . . . C . . . . . 88.
. . . . D . . . . . 28.

Algiebraicznie. Maiątek B . . . . . x.
Maiątek A . . . . . $x + 40$.
Maiątek C . . . . . $2x$.
Maiątek D . . . . . $2x - 60$.
Drugié wyrażénié maiątku A . . . $6x - 180$.

Warunek. $6x - 180 = x + 40$.

(Dodáwſzy 180 po obu ſtronach) $6x = x + 220$.
(Odiąwſzy $1x$ po obu ſtronach) $5x = 220$.
(Podzieliwſzy przez 5 obie ſtrony) $1x = 44$.

Inſzé przykłady. *A, má więcéy 88 Zł. niż B.*
C, má więcéy 99 Zł. niż D.
A, má 4 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.
A, má 70 Zł. więcéy niż B.
C, má 84 Zł. więcéy niż . . . . . D.
A, má 5 razy tylé, ilé . . . . . . D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

35. *Za-*

35\. *Zadanié 22.* *A, i B, maią razém 84 Zł.*
C, má więcéy 14 Zł. niż D.
A, má 3 razy tylé, ilé D.
C, má 2 razy tylé, ilé B.

Iléż má każdá z tych Osób w szczególności?

Niech liniiá AB, wyrážá summę maiątku A, i B, toiest Zł. 84, a liniiá CD, niech wyrážá różnicę maiątku C, i D, toiest 14 Zł. Niech AX, i BX, wyrážáią maiątki A, i B: niech nakoniec CY, DY, wyrážaią maiątki C, i D. Maiątek A, powinién bydź podług zadania trzy razy tak wielki, iak iest maiątek D: więc téż, i AX, powinna bydź trzy tak wielká, iak DY: a zatém ieżeli weźmiémy AE, trzy razy tylą, ilá iest CD, będzie EX, trzy razy tylá, ilá iest CY. A że CY, má bydź dwa razy tak wielká, iak BX; więc EX, będzie 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 7 razy tak wielká, iak BX. Jest zaś EB, równá summie AB, i 3 razy CD, toiest 126; więc BX, wyrážać będzie siódmą część Zł. 126, toiest 18. Przeto AX, wyrázi 84, mniéy 18, toiest 66. CY, 2 razy tak wielká, iák BX, wyrazi 36, a DY, wyrazi mniéy 14, toiest wyrazi 22. Fig. 7.

Maiątek A . . . . 66.
Maiątek B . . . . 18.
Maiątek C . . . . 36.
Maiątek D . . . . 22.

Algiebraicznie. Mian: Maiątek D . . . . x.
Maiątek C . . . . $x + 14$.
Maiątek A . . . . $3x$.
Maiątek B . . . . $84 - 3x$.

Drugié wyrażénie maiątku C . . . . . $168 - 6x$.

Warunek. $x + 14 = 168 - 6x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $7x + 14 = 168$.
(Odiąwszy 14 po obu stronach) . . . $7x = 154$.
(Podzieliwszy przez 7, obie strony) $1x = 22$.

Rozwiązanié. $x = 22.$ Maiątek D.
$x + 14 = 36.$ Maiątek C.
$3x = 66.$ Maiątek A.
$84 - 3x = 18.$ Maiątek B.

Spráwdzénié. 36, toieſt maiątek C, dwa razy w ſobie zamyká 18, toieſt maiątek B.

Inſzé przykłady. *A, i B, maią razém 220 Zł.*
C, má więcéy 80 Zł. niż D.
A, má 4 razy tylé, ilé D.
C, má 2 razy tylé, ilé B.

A, i B, maią razém 144 Zł.
C, má 64 złotych więcéy, niż D.
A, má 5 razy tylé, ilé . . D.
C, má 3 razy tylé, ilé . . B.

36. *Zadanié 23.* *A, i B, maią razém 100 Zł.*
C, i D, maią także razem 100 Zł.
A, má, 3 razy tylé, ilé D.
C, má, 2 razy tylé, ilé B.

Iléż má każdá z tych Oſób w ſzczególności,

Przez rozumowanié. Niech liniie równé AB, CD, wyráżaią dwie ſummy równé: piérwſzá ſummę maiątku A, i B, drugá ſummę maiątku C, i D.

Fig. 8. Niech AX, i BX, wyráżaią maiątki ſzczególné A, i B, a CY, DY, niech wyráżaią maiątki ſzczególné, C, i D. Maiątek A, má bydź 3 razy tak wielki, iak maiątek D, więc AX, powinna trzy razy zamykać w ſobie DY. Zróbmy AE, trzy razy tylą, ilá ieſt CD: będzie EX, trzy razy także tak wielká, iak CY: a że CY, má bydź dwa razy tylá, ilá ieſt BX; więc EX, ieſt 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 5 razy tylá, ilá ieſt BX. Jeſt więc liniiá BX, $\frac{1}{5}$ linii EB, toieſt $\frac{1}{5}$ Zł. 200: a zatém BX wyráżá Zł. 40.

Maiątek B 40
Maiątek A . . . . 60.
Maiątek C . . . . 80.
Maiątek D . . . . 20.

Algie-

Algiebraicznie. *Mianowanié.* Maiątek D . . . x.
Maiątek A . . . $3x$.
Maiątek B . . . $100 - 3x$.
Maiątek C . . . $100 - x$.
albo . . . $200 - 6x$.

Warunek $100 - x = 200 - 6x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $100 + 5x = 200$.
(Odiąwszy 100 po obu stronach) . . . $5x = 100$.
(Podzieliwszy przez pięć) . . . . $1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$. Maiątek D.
$3x = 60$. Maiątek A.
$100 - 3x = 40$. Maiątek B.
$200 - 6x = 80$. Maiątek C.
$100 - x = 80$. Drugié wyrażénié maiątku C.

Spráwdzénié. Dwa wyrażénia maiątku C, są równé.

Insze przykłady. *A, i B. maią razém Zł. 112.*
C, i D, maią razém Zł. 126.
A, má 5 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

A, i B, maią razém 117 Zł.
C, i D, maią razém 113 Zł.
A, má 5 razy tylé, ilé D.
C, má 3 razy tylé, ilé B.

37. *Zadanié 24. Dwie Osoby A, i B, maią razém 100 Zł. A, má trzy razy tylé nad 40, ilé B, má mniéy od 40.*

Niech liniiá AB, wyráżá summę maiątków niewiadomych, AX, BX, osób A, i B. Niech tak liniiá AD, iak liniiá BC, wyráżá 40. Liniiá DX, wyráżać będzie to, co má A, nad 40 Zł. a liniiá CX, wyrazi to, co mà B, mniéy od 40: musi zatém bydź DX, trzy razy tak wielká, iak CX, a CD, dwa razy tak wielká, iak CX. Że zaś CD, wyráżá 20; więc CX wyráżać, będzie 10, a zatém AX, wyrazi 70, a BX, 30. Fig. 9.

 Maiątek

Maiątek A . . . . . 70.
Maiątek B . . . . . 30.

A, má więcéy 30, nad 40.
B, má mniéy 10, od 40.

Algiebraicznie. Mian: To, co má B, mniéy od 40 nazwiéymy . . x.
Będzie to, co má A, więcéy nad 40 . . . $3x$.

Maiątek przeto B . . . . . $40 - x$.
Maiątek . . . A . . . . . $40 + 3x$.
Summa maiątków . . . . $80 + 2x$.

Warunek. $80 + 2x = 100$.

Przérábianié. (Odiąwszy 80 po obu stronach) $2x = 20$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . $1x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Tylé má B, mniéy od 40.
$3x = 30$. Tylé má A, więcéy nad 40.

$40 - x = 30$. Maiątek B.
$40 + 3x = 70$. Maiątek A.

$80 + 2x = 100$. Summa maiątków.

Inszé przykłady. Oyciec wráz z Syném maią lát 60. Ténże oyciec má 4 razy tylé więcéy nad lát 18, ilé Syn má mniéy od lát 18.

A, i B, maią razém złotych 1200. A, má 5 razy tylé więcéy nad 90, ilé B, má ráz więcéy nad 90.

38. *Zadanié 25. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków: summa tych dwóch znaków osobno wziętych czyni 9. Gdy do téy liczby ze dwóch znaków złożonéy dodám 27, będę miáł inną liczbę złożoną z tychże dwóch co i piérwéy znaków, ale w porządku wspacznym. Jakież są té dwie liczby?*

Arytmetycznie. Ponieważ piérwszá liczba, któréy szukámy, powinna bydź taká, aby summa dwóch iéy znaków osobno wziętych czyniła 9; więc będzie iedną z ośmiu liczb następuiących:

18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

Z tych ośmiu liczb cztéry ostatnié, 81, 72, 63, 54, składaią się z tych samych znaków, co i cztéry piérwszé, 18, 27, 36, 45, ale w porządku wspacznym. Będzie więc iedna z tych cztérech liczb, 18, 27, 36, 45, liczbą piérwszą szukaną. Różnice tych liczb od tamtych, toiest 18, od 81, 27 od 72, 36 od 63, 45 od 54, będą 63, 45, 27, 9. Z tych cztérech różnic trzeciá tylko, toiest 27, równá się różnicy danéy: a zatém liczby 36, i 63, téy różnicy odpowiadaiącé, są liczbami którycheśmy szukali.

Algiebr: Mian: Znak dziesiątków piérwszéy liczby szukanéy . . x.
Znak iedności téyże liczby . . . . . $9 - x$.
Ważność znaku dziesiątków . . . . . . $10x$.
Ważność znaku iedności . . . . . . $9 - x$.

Liczba piérwszá szukaná . . . . . $9x + 9$.

Znak dziesiątków drugiéy liczby szukanéy . . $9 - x$.
Znak iedności téyże liczby . . . . x.
Ważność znaku dziesiątków drugiéy liczby $90 - 10x$.
Ważność znaku iedności téyże liczby . . . . x.
Liczba drugá szukaná . . . . $90 - 9x$.

A że ta drugá liczba, má bydź większá 27, od piérwszéy; więc drugié iéy wyrażénié będzie . . . . . $9x + 36$.

Warunek. $9x + 36 = 90 - 9x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $9x$ po obu stronach) $18x + 36 = 90$.
(Odiąwszy 36 po obu stronach) . . $18x = 54$.
(Podzieliwszy przez 18) . . . . . . $1x = 3$.

Rozwiązanié. $x = 3$. Znak dziesiątków piérwszéy liczby.
$9 - x = 6$. Znak iedności piérwszéy liczby.

Ténże znak 6, iest znakiém dziesiątków drugiéy liczby, a 3 znakiém iedności drugiéy liczby, tak iak wyżéy: a zatém liczby szukané, są 36, i 63.

Inszé przykłady. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 10: Gdy do téy liczby dodám 36, będę miał inną liczbę złożoną z tychże co i piérwszá, znaków, ale w porządku wspacznym.

Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków, których summa czyni 12. Gdy do téy liczby dodám 18, będę miał inną liczbę złożoną z tychże co i piérwszá, znaków, ale w porządku wspacznym.

39. *Uwága.* W każdym z trzech przykładów poprzedzaiących summa dwóch liczb z iednakowémi znakami, w porządku wspacznym ułożonémi była iednostayná: toiest w przykładzie piérwszym była ta summa 99, w drugim 110, w trzecim 132. Gdyby za drugi warunek daná była ta summa taká, iaką té dwie liczby czynić powinny; tedy tén drugi warunek, byłby zbytnim: bo iuż był zawarty w piérwszym warunku: gdyby zaś daná była inná iaká summa od piérwszéy odmiénná, tedy zadanié byłoby niepodobné do rozwiązania. Ostrzédz to nás powinno, że warunki dané, maią bydź zawsze takié, aby iedné nie były zawislé od drugich, i w nich się żádną miarą nie zawiérały.

40. *Zadanié 26. Mám liczbę złożną ze dwóch znaków, toiest z iedności i z dziesiątków: znak zaś iedności má w sobie więcéy iedną iednością, niż znak dziesiątków. Summa téy liczby, i drugiéy z tychże dwóch znaków złożonéy, ale w porządku wspacznym czyni 55.*

Arytmetycznie. Piérwszá liczba szukaná musi bydź iedną z tych cztéréch 12, 23, 34, 45.

Liczby złożoné z tychże dwóch znaków, ale w porządku wspacznym są: 21, 32, 43, 54. Summa tych liczb i piérwszych im odpowiadaiących iest: 33, 55, 77, 99. A że drugá z tych summ równá iest summie danéy; więc liczby, których szukaliśmy, będą 23, i 32. Jakoż té dwie liczby czynią zadosyć danym warunkóm.

Algiebr: Mian: Znak dziesiątków 1wszéy liczby szukanéy . . x.
Znak iedności . . . . . $x+1$.
Ważność dziesiątków . . . $10x$.
Ważność iedności . . . . $x+1$.
Ważność 1wszéy liczby . . $11x+1$.

Znak dziesiątków drugiéy liczby . . . $x+1$.
Ważność dziésiątków drugiéy liczby . $10x+10$.
Znak i ważność iedności . . . . x.
Ważność drugiéy liczby . . . . $11x+10$.
Summa piérwszéy i drugiéy liczby . . $22x+11$.

Wáru-

Warunek. $22x + 11 = 55$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 11 po obu ſtronach) $22x = 44$.
(Podzieliwſzy przez 22) . . . $1x = 2$.

Rozwiązanié. $x = 2$. Znak dzieſiątków piérwſzéy liczby.
$x + 1 = 3$. Znak iedności.

23. Liczba 1wſzá ſzukaná.
32. Liczba 2gá w porządku wſpacznym.

55. Summa dwóch liczb ſzukanych.

Inſzé przykłady. Mám liczbę złożoną ze dwóch znaków: Znak iedności má 2 więcéy, niż znak dzieſiątków. Summa téy liczby, i inſzéy złożonéy z tychże znaków, ale w porządku wſpacznym czyni 88.

Mám liczbę, któréy znak iedności ieſt większy pięcią, od znaku dzieſiątków. Summa téy liczby i inſzéy złożonéy z tychże znaków, ale w porządku wſpacznym czyni 121.

41. *Uwágá.* Gdyby za drugi warunek daná była różnica dwóch liczb, tedy tén drugi warunek, alboby ſię zgádzáł z piérwſzym, od którégo zawiſł, i byłby zbytnim; alboby ſię iému ſprzeciwiáł, i Zagádniénié byłoby niepodobné do rozwiązaniá.

42. *Zadanié 27. Pewny Kupiec na początku każdégo roku wyłączá z kapitáłu ſwégo co rok na wydátki Zł. 1200: reſztą zaś kapitáłu tak pomyślnie zarábiá, że na końcu każdégo roku dwoi kapitáł pozoſtały. Przy końcu 3 lát przychodzi do kapitáłu 5 razy tak wielkiégo, iak był tén, który zebráł przed 3 laty.*

Jakiż ieſt kapitáł iego?

Arytmetycznie. Gdyby tén Kupiec nic nie wydáwáł; tedy na końcu 1wſzégo roku podwoiłby ſwóy kapitáł. Na końcu drugiégo roku podwoiłby znowu kapitáł iuż podwoiony, który zatém byłby 4 razy tak wielki, iak był przy początku piérwſzégo roku. Na końcu trzeciégo roku byłby podwoiony tén kapitáł, który miáł na końcu drugiégo roku, toieſt, byłby 8 razy tak wielki, iak przy początku 1wſzégo roku. Gdyby więc tén kupiec nic nie wydáwáł; tedy na końcu 1wſzégo, 2go, 3ciégo roku, zebráłby kapitáł 2, 4, 8, razy tak wielki, iak był przy początku 1wſzégo roku.

Té zatém 1200 złotych, które przy początku piérwszégo roku na wydátki wyłączył, gdyby się przy kapitále zostáwały; tedy na końcu trzech lát 8 razyby się pomnożyły, toiest, zamiást tych 1200 Zł. miáłby na końcu trzeciégo roku 9600. Té 1200 Zł. które przy początku drugiégo roku na wydátki wyłączył, byłyby się na końcu trzeciégo roku 4 razy pomnożyły, toiest, miáłby zamiást nich na końcu 3ciégo roku 4800. Té naostatek 1200 Zł. które przy początku 3ciégo roku na wydátki wyłączył, byłyby się na końcu 3ciégo roku podwoiły, toiest miáłby zamiást nich na końcu 3ciégo roku 2400 złotych.

Że więc ten kupiec przez trzy lata co rok z kapitáłu swégo wyłączáł na wydátki Zł: 1200, dlá tego na końcu trzeciégo roku kapitał iego powinién bydź mnieyszy tą summą, którą byłby większy, gdyby był nic z swégo kapitáłu nie wydáwáł: toiest, będzie na końcu trzeciégo roku kapitał tego kupca mnieyszy summą tych trzech liczb 9600, 4800, 2400, czyli 16800 złotych. Nie dostaie tedy kupcowi tému złotych 16800, aby miáł na końcu trzeciégo roku 8 razy tylé, ilé miáł na początku 1wszégo roku. A że na końcu trzeciégo roku má tylko 5 razy tylé, ilé miáł na początku piérwszégo roku; więc nie dostaie mu trzy razy tylé, ilé miáł na początku piérwszégo roku, aby na końcu trzeciégo roku, miáł 8 razy tylé, ilé miáł na początku piérwszégo roku: a zatém 1wszy kapitał iego trzy razy wzięty czyni 16800 złotych: trzeciá zaś część złotych 16800, toiest 5600 złotych iest piérwszym iego kapitáłém.

1wszy kapitał kupca tego	5600 Zł.
Po 1wszym wydátku . .	1200.
Zostaie mu	4400.
Na końcu 1wszégo roku má . .	8800.
Po drugim wydátku	1200.
Zostaie mu	7600.
Na końcu 2giégo roku má	15200.
Po 3cim wydátku	1200.
Zostaie mu	14000.

Na

Na końcu 3ciégo roku . . . 28000, toieſt 5 razy 5600 Zł.

Algiebraicznie. Mian: Kapitáł 1wſzy tego kupca . . x.
Po piérwſzym wydátku 1200 Zł. $x - 1200$.
Na końcu 1wſzégo roku . . $2x - 2400$.
Po drugim wydátku 1200 Zł. $2x - 3600$.
Na końcu 2giégo roku . . . $4x - 7200$.
Po trzecim wydátku 1200 Zł. $4x - 8400$.
Na końcu trzeciégo roku . . $8x - 16800$.

A że tén kupiec na końcu 3ciégo roku má mieć 5 razy tylé, ilé miáł na początku 1wſzégo; więc

Warunek. $8x - 16800 = 5x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 16800 po obu ſtronach) $8x = 5x + 16800$.
(Odiąwſzy $5x$ po obu ſtronach) . . $3x = 16800$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . . $x = 5600$.

Rozwiązanié. $x = 5600$.

Dalſzé w rozwiązaniu poſtępowanié, iuż w ſpoſobie rozwiązania Arytmetycznym ieſt wyłożoné.

Inſzé przykłady. Wydátek roczny tego kupca ieſt 1500 Zł. Na końcu lát 4, má tylé 10 razy, ilé miáł na początku.

Wydátek roczny kupca ieſt 2200 Zł. Na końcu lát 5 má 10 razy tylé, ilé miáł na początku.

43. *Zadanié 28. A, daie dlá B, tylé Zł. ilé B, iuż má: B, wzaiémnie daie dlá A, tylé Zł. ilé ſię u A, pozoſtało. Po tym wzaiémnym dátku, A, i B, maią po 4 Zł. Iléż piérwéy Zł. było u A, a ilé u B?*

Arytmetycznie. A, mieć będzie Zł. 4, doſtáwſzy od B, tylé Zł. ilé ich má pozoſtałych, toieſt A, má Zł. 4, po podwoionym przez B, majątku ſwoim: więc u A, była piérwéy połowa Zł. 4, toieſt Zł. 2. B, dáwſzy dlá A, Zł. 2, má pozoſtałych Zł. 4: więc przed tym dátkiém muſiało bydź u B, Zł. 6.

B, mieć będzie 6 Zł. wziąwſzy od A, tylé, ilé iuż má: więc przéd tym wziątkiém była u B, połowá Zł. 6, toieſt 3 Zł: więc wziątek B, od A, ieſt Zł. 3 Że zaś A, dáwſzy té 3 Zł. má reſzty 2 Zł. więc przed tym dátkiém było u A Zł. 5.

Maiątki A.		Maiątki B.	
1wſzy maiątek . . .	5 Zł.	1wſzy maiątek . . .	3 Zł.
2gi maiątek po wydanych Zł. 3 . . .	2.	2gi po wziętych Zł. 3 . . .	6.
3ci maiątek po wziętych Zł. 2 . .	4.	3ci po wydanych Zł. 2	4.

Algiebraicznie. A, i B, maią naoſtatku po Zł. 4; więc maią razém Zł. 8. A że tylko między niémi były wzaiémné dátki; więc i przed témi dátkami znaydowało ſię u nich Zł. 8.

Mian: 1wſzy maiątek B . . . . x. 1wſzy maiątek A . . . $8-x$.
2gi maiątek B, po wziątku $2x$. 2gi maiątek A, po datku $8-2x$.
Maiątek A, po wziątku $16-4x$.

Warunek. $16-4x=4$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $4x$ po obu ſtronach) $16=4+4x$.
(Odiąwſzy 4 po obu ſtronach) $12=4x$.
(Podzieliwſzy przez 4) . . . . . . $3=1x$.

W dalſzém postępowaniu można wziąć miarę z poſtępowania Arytmetycznégo.

2gi *Przykład. A, daie dlá B, dwa razy tylé, ilé má B: B, wrácá dlá A, dwa razy tylé, ilé ſię zoſtało u A. Naoſkatek tak A, iak i B, maią po Zł. 9.*

Arytmetycznie. A, mieć będzie 9 Zł. gdy weźmie od B, tylé dwoie, ilé iuż má A: więc przez tén wziątek, maiątek A, ieſt potroiony, a zatém u A, było przedtém Zł. 3; więc od B, má Zł. 6. B, má Zł. 9, dáwſzy dlá A, Zł. 6; więc u B, przed daniém złotych 6, było 15 Zł. B, má Zł. 15 wziąwſzy od A, tylé dwoie, ilé má przed tym wziątkiém; więc má naprzód Zł. 5, a potém bierze Zł. 10. Że zaś ſię u A, zoſtało Zł: 3, dáwſzy Zł. 10; więc przed tym dátkiém było u A, Zł. 13.

Maią-

Maiątki A.		Maiątki B.	
1wſzy maiątki . . .	13. Zł.	1wſzy maiątek . . .	5. Zł.
A, daie	10.	B, bierze	10.
Zoſtaie ſię . . .	3.	Więc má	15.
Bierze	6.	Daie	6.
Więc má	9.	Zoſtaie ſię . . .	9.

Algiebraicznie. Naoſtatku tak A, iak i B, maią po Zł. 9; więc razém maią Zł. 18. A że maiątków ich ſumma była i przedtém iednakowá; więc i przedtém było u nich Zł. 18.

Mian: 1wſzy maiątek B . . x. 1wſzy maiątek A . . $18 - x$.
po wziątku $2x$ . . . $3x$. Dáwſzy $2x$ . . . . . $18 - 3x$.
Wziąwſzy $36 - 6x$, $54 - 9x$.

Warunek. $54 - 9x = 9$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $9x$ po obu ſtronach) $54 = 9 + 9x$.
(Odiąwſzy 9 po obu ſtronach) $45 = 9x$.
(Podzieliwſzy przez 9) . . . . . . $5 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 5$. 1wſzy maiątek B.
$3x = 15$. Maiątek B, po wziętych Zł. 10.

$18 - x = 13$. 1wſzy maiątek A.
$18 - 3x = 3$. Maiątek A, po danych Zł. 10.
$54 - 9x = 9$. Maiątek A, po wziętych Zł. 6.

Inſzé przykłady. A, daie dlá B, 3, 4, 5, i t. d. razy tylé, ilé má B. B, oddaie dlá A, 3, 4, 5, i t. d razy tylé, ilé u A, zaſtało. Po czém tak A, iak i B, maią w piérwſzym razie po Zł. 16, w drugim po Zł. 25, w trzecim po Zł. 36, i t. d.

44 *Uwága.* W przykładach zadania poprzedzaiącégo, *np:* w piérwſzym, gdybyśmy byli ſzukali wyrażénia powtórnégo maiątku B; tedyby trzeba było odiąć ilość $8 - 2x$ od ilości $2x$: w czém ponieważ nieiaká trudność zachodzi; więc działanié to tak obiaśniámy.

Gdyby od $2x$ przyszło odiąć 8; zostałoby $2x - 8$. Ale, że zamiast 8 trzeba odeymować 8 mniéy $2x$; więc odeymuiąc 8, nadtoby się odięło, i reszta byłaby mnieyszá dwiéma x, niż bydź powinna: więc do téy reszty $2x - 8$, trzeba znowu dodadź $2x$, aby reszta była taká, iaká bydź powinna: a zatém $4x - 8$, będzie práwdziwą resztą.

Spráwdzénié tego na tém zawisło, aby resztę $4x - 8$ dodadź do ilości $8 - 2x$, która się odeymowała: i obáczyć, czyli ta summa uczyni $2x$: że zaś tak iest w saméy rzeczy; więc się dobrze odięło.

Podobnie, i w drugim przykładzie, chcąc znaléźć wyrażénié powtórnégo maiątku B; trzeba było od $3x$ odiąć $36 - 6x$. Gdyby 36 przyszło odeymować od $3x$; byłoby reszty $3x - 36$: ale że trzeba odeymować 36, zmnieyszoné széścią x; więc ta reszta byłaby mnieyszá széścią x, niż bydź powinna. Trzeba więc do niéy dodadź té $6x$, a dopiéro reszta $9x - 36$, będzie resztą práwdziwą.

Takié rozumowanié uczyniwszy, ustanowimy Mianowania w przykładach następuiących, w których sposób postępowania Arytmetyczny nie różni się od Algiebraicznégo.

A, daie dlá B, tylé Zł. ilé ich má B.
B, daie dlá A, tylé Zł. ilé się u A zostało.
A, znowu daie dlá B, tylé Zł. ilé się u B, zostało.
B, znowu daie dlá A, tylé Zł. ilé się u A, zostało.

Po tych wzaiémnych dwoiakich dátkach, tak A, iak i B, mieć będą po Zł. 16.

Mianowanié.	1wszy maiątek B	x.
	1wszy maiątek A	$32 - x$.
	B, wziąwszy x, od A, má	$2x$.
	A, dáwszy x, dlá B, má	$32 - 2x$.
	B, dáwszy $32 - 2x$, dlá A, má . .	$4x - 32$.
	A, wziąwszy $32 - 2x$, od B, má . .	$64 - 4x$.
	B, wziąwszy $4x - 32$, od A, má . .	$8x - 64$.
	A, dáwszy $4x - 32$, dlá B, má . .	$96 - 8x$.
	B, dáwszy $96 - 8x$, dlá A, má . .	$16x - 160$.
	A, wziąwszy $96 - 8x$, od B, má . .	$192 - 16x$.

Warunek. $16x - 160 = 16$.

Prze-

Przerábianié. (Dodáwſzy 160 po obu ſtronach) $16x = 176$.
(Podzieliwſzy przez 16) . . . . . . $x = 11$.

Rozwiązanié. $x = 11$. Piérwſzy maiątek B.
$32 - x = 21$. Piérwſzy maiątek A.
$2x = 22$. Maiątek B, wziąwſzy 11.
$32 - 2x = 10$. Maiątek A, dáwſzy 11.
$4x - 32 = 12$. Maiątek B, dáwſzy 10.
$64 - 4x = 20$. Maiątek A, wziąwſzy 10.
$8x - 64 = 24$. Maiątek B, wziąwſzy 12.
$96 - 8x = 8$. Maiątek A, dáwſzy 12.
$16x - 160 = 16$. Maiątek B, dáwſzy 8.
$192 - 16x = 16$. Maiątek A, wziąwſzy 8.

Inſzé przykłady. A, i B, czynią podobné iak wyżéy zamiany 3, 4, 5, i t. d. razy, i maią naoſtatek w piérwſzym razie po Zł. 64, w drugim po 256, w trzecim po 1024 i t. d.

45. Wprawiwſzy Uczniów przez wielé ſzczególnych odeymowania przykładów, wnieśmy z rozumowania czynionégo na każdym z tych przykładów, regułę ogólną odeymowania, na tém ſię zaſadzaiącą, aby odmiéniać znaki przed wyrazami ilości odeymować ſię maiącéy: toieſt + na — a zaś — na + i potém dodáwać. O téy iednak oſtatniéy odmianie, wtedy tylko przyzwoicie będzie ſię mówiło; gdy w jlości odeymować ſię maiącéy znáydować ſię będą wyrazy, z poprzedzaiącym znakiém odeymowania —.

1mo. Od $8x$.
trzeba odiąć . $5x + 3$.

Zoſtanie . . . $3x - 3$.

2do. Od . . $10x + 15$.
trzeba odiąć . . . $5x + 7$.

Zoſtanie . . . . . $5x + 8$.

3tio. Od . . $12x + 5$.
trzeba odiąć . . . $5x - 3$.

Zamiéńmy to działanié, na dodáwanié, odmieniwszy znaki, w jlości odeymować się maiącéy: toiest do $12x + 5$.

dodáymy — $5x + 3$.

Summa . . . . $7x + 8$.

Ta summa iest w saméy rzeczy resztą, gdy od $12x + 5$, odeymiémy $5x - 3$.

Jakoż dodanié dwóch ilości maiących przed sobą znaki przeciwné + i —, iest to iedno, co odeymowanié ich iednéy od drugiéy bez względu na znaki: tak *np:* iedno iest, dodadź + 8 do — 3, co iest odiąć 3 od 8: bo tak ta summa, iak i ta reszta, będzie 5.

Trzeba ieszcze przytoczyć więcéy przykładów odeymowania, takich zwłászcza, gdzieby ilość odeymować się maiącá zawiérała wyrazy ze znakami odmiénnémi.

Od $12x - 15$.
Odeymuię . . . $5x - 12$.

Zostanie . . . $7x - 3$.

Od $18x - 32$.
Odeymuię . . $40 - 7x$.

Zostanie . . $25x - 72$.

Od $7x - 8$.
Odeymuię $15 - 5x$.

Zostanie . . $12x - 23$.

Aby to lepiéy obiaśnić, połóżmy liczby zwyczayné zamiást Algiebraicznych wyrażéń.

I tak niech w piérwszym z poprzedzaiących przykładzie będzie $x = 4$, a zatém

$$12x - 15 = 33.$$
$$5x - 12 = 8.$$

Różnica 8 od 33, iest 25: przeto i różnica $5x - 12$ od $12x - 15$, toiest $7x - 3$ powinna bydź 25. Jakoż położywszy 4 zamiást x, w tém wyrażéniu $7x - 3$ będzie $7x - 3 = 25$.

46. Można tu wzmiánkę uczynić, o różnicy między ilościami, *przydaynémi*, i *uiémnémi*, (quantitates positivæ, & negativæ) która to różnica nie inaczéy się bierze, tylko względém na tén cél, w którym sobie wystawuiémy té ilości. Jeżeli ié sobie wystawuiémy *oddziélnie* (abstracte) toiest, nie przywięzuiąc do nich żadnégo znaczénia rzeczy; tedy w tym względzie, bierzémy za *przydayné* té ilości, które przed sobą maią znak dodáwania, i któré uważámy iako powiększaiącé tę ilość, do któréy ié dodaiémy: a za *uiémné* bierzémy té ilości, które maią przed sobą znak odeymowania, czyli które uważámy, iako zmnieyszaiącé tę ilość, do któréy ié dodaiémy.

Wystawuiąc sobie maiątek osoby iakiéy, iak ilość przydayną, uważámy długi teyże osoby, iak ilość uiémną, przez wzgląd, iż té długi zmnieyszaią téy osoby maiątek: i iedno iest w Matematyce powiedzieć, że kto winién złoty, albo że on má w tym względzie mniéy złotym. Ale gdyby piérwszym zamiarém naszym było obrachować długi iakiéy osoby, gdyby dopiéro, stán tych długów ułożywszy, doszliśmy potém, że ta osoba má iesżcze 1000 naprzykład Zł. tedy té tysiąc Zł. które má ta osoba, postawioné naprzeciw tému tysiącu Zł. które winna; zgładziłyby tén ostatni dług: i w tym względzie iednoby było powiedzieć, że ta osoba má tysiąc złotych, albo, że winna mniéy 1000 Zł.

Tak téż, ieżeli piérwszym zamiarém podróżnégo iest, aby się dostáł na pewné mieysce, a ieżeli się oddálá od swoiéy drogi tak dalece, iż znowu powrácá się na mieysce, z którégo wyszedł; tedy kroki iego przy zwrocie uczynioné, gubią té kroki, któréby był uczynił, dlá zbliżénia się ku mieyscu zamierzonému: i wystawuiąc sobie té ostatnié kroki, iak przydayné, piérwszé się uważaią iak uiémné. Gdyby kto chcąc do Wiédnia zaiechać, brál się z Warszawy drogą do Petersburga, i potém postrzegł swóy błąd; tedyby zwrotém przeciwnym powinién zgładzić tę ilość drogi, którą się był oddálił od Wiédnia, zamiást co się miál do niego przybliżyć. Ale, gdyby było piérwszym iego zamiarém, dostać się do Petersburga: tedy, ponieważ ta sama droga przez niego przeiechaná, ku Petersburgowi prowadzącá, czyniłaby zadosyć piérwszému iego zamiarowi; uważalibyśmy ią iako ilość przydayną.

Wystawuiąc sobie dół iakiéy kamienicy, nakształt punktu, od któré-go rachować mámy wstępy na górę, lub zstępy *np.* do piwnic; można nazwać zstępy, wstępami uiémnémi. I lubo w rozmowie zwyczaynéy śmiésznieby się wydáwało, gdyby kto tak mówił, piętro *mniéy iedném*, piętro *mniéy dwoma*, i t. d. (zszedłszy z dołu kamienicy wgłąbsz do piwnic na piętro piérwszé, drugié, i t. d.) atoli iednak Matematyk używá tych wyrażéń w rachun-

kach

kach ſwoich: bo ſpoſoby té tłumaczénia ſię oznáczaią náywyraźniéy przeciwność położénia mieyſc, o które rzecz idzie.

Trzeba ſobie wyſtawiać ilości przydayné, i uiémné, pod tym widokiém względu i przeciwności, abyśmy zrozumiéć mogli znaczénié wyrażéń tych, do których czaſém przychodzi ſię w rozwiązaniach Zagadniéń: bo inaczéy zdáwałoby ſię, iż rozwiązania té na Zadanié nie odpowiadaią.

Przykład 1. *A, i B, maią razém Zł. 4.*
A, i . . C, maią . . Zł. 6.
B, i C, maią . . Zł. 12.

Jakiż ieſt maiątek każdéy z tych oſób w ſzczególności?

Arytmetycznie. Summa tych trzech maiątków dwa razy wzięta ieſt . . . . 22. Zł.
ráż wzięta . . . . 11.

A że B, i C, maią razém 12 Zł. więc przydanié maiątku A, do ſummy maiątków B, i C, zmnieyſzá tę ſummę. iednym Zł: a zatém oſoba A, zamiáſt coby miała mieć złoty iedén, winna ieſt tén Zł. 1, czyli má mniéy Zł. iednym.

Aby maiątek A, był przydayny, tak trzeba było to Zadanié wyłożyć: B, i C, maią razém Zł. 12, gdy zaś od maiątku B, i C, oſobno wziętego odeymiémy maiątek A, reſzty będą 4 Zł. i 6 Zł.

Algiebraicznie. *Mianowanie.* Maiątek A . . . . x.
Maiątek B . . $6+x$.
Maiątek C . . $8+x$.
Summa maiątków B, i C . $14+2x$.

Warunek. $14+2x=12$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 14 po obu ſtronach) $2x=-2$.
(Podzieliwſzy przez 2) . . . . . $x=-1$.

Rozwiązanié. $x=-1$. Maiątek A.
$6+x=5$. Maiątek B.
$8+x=7$. Maiątek C.

Przykład

Przykład 2. A, i B, maią razém 23 Zł.
C, i D; maią razém 6. Zł.
A, má trzy razy tylé, ilé C.
D, má 2 razy tylé, ilé B.

Iléż má każdá z tych osób w szczególności?

Doydziémy natychmiást przez rozumowanié, że maiątki tych osób, nié mogą bydź wszystkié przydayné. Jakoż, ponieważ summa maiątków A, i B, iest więcéy niż trzy razy tylá, ilá iest summa maiątków C, i D; więc ieżeli A, má trzy razy tylé, ilé C, więc i maiątek B, powiniénby bydź trzy razy tak wielki, iak maiątek D: a że przeciwnie D, má więcéy niż B, bo má 2 razy tylé, ilé B; więc maiątki tych cztérech osób, nie mogą bydź wszystkié przydayné.

Niech liniiá AB, wyráżá 23, toiest summę maiątków A, i B.

Niech drugá liniiá CD, wyráżá 6, toiest summę maiątków C, i D. Fig. 10.
Niech punkt X, zamiást bydź wziętym na linii AB, między A, i B, będzie wzięty z strony przeciwnéy, toiest na przedłużéniu linii AB: weźmy podobnie i punkt Y, na przedłużéniu linii CD. Niech na linii AB, będzie wziętá AE, trzy razy tak wielká, iak CD.

Jeżeli maiątki A, B, C, D, są wyrażoné przez liniie AX, BX, CY, DY; więc AX, powinna bydź 3 razy tak wielká, iak CY: a że AE, iest 3 razy tak wielką iak CD; więc i EX, powinna téż bydź trzy razy tak wielká iak DY. Że zaś DY, má bydź 2 razy tak wielká, iak BX, więc EX, musi bydź 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EB, będzie 5 razy tak wielká, iak BX. A że EB, wyráżá różnicę między 23, i 18, toiest 5, więc BX, wyrážać będzie piątą część pięciu, toiest 1: a DY wyrazi 2.

Dwa tedy piérwszé warunki zagadniénia, tak powinny były bydź wyłożoné:

A, má 23 Zł. więcéy niż B: C, má 6 Zł. więcéy niż D.

Algiebraicznie. Maiątek B . . . . x.
Maiątek A . . . . $23 - x$.
Maiątek D . . . . . . $2x$.
Maiątek C . . . . $6 - 2x$.
Drugié wyrażénié maiątku A . . . $18 - 6x$.

Warunek $23 - x = 18 - 6x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6x$ po obu stronach) $23 + 5x = 18$.
(Odiąwszy 18 po obû stronach) $5 + 5x = 0$.
(Odiąwszy 5 po obu stronach) $5x = -5$.
(Podzieliwszy przez 5) . . . . . $x = -1$.

Rozwiązanié. $x = -1$. Maiątek B.
$23 - x = 24$. Maiątek. A.
$2x = -2$. Maiątek D.
$6 - 2x = 8$. Maiątek C.

47. *Zadanié 29. Maiątki sześciu osób: A, B, C, D, E, F, są takié, że*

Summa maiątków A, i B, iest . . . . 100. *Zł.*
. . . . *C, i D,* . . . . . 100.
. . . . *E, i F,* . . . . . 100.

A, má 2 razy tylé, ilé C.
E, má 3 razy tylé, ilé B.
D, má 4 razy tylé, ilé F.

Jakiż iest maiątek w szczególności, każdéy z tych osób.

Fig. 11. *Przez rozumowanié.* Niech liniie równé AB, CD, EF, wyrážaią summy dané 100 Zł. Niech liniie AX, BX, wyrážaią maiątki A, i B. Liniie CY, DY, maiątki C i D. Liniie EZ, FZ, maiątki E, i F. Liniiá AX, powinna bydź 2 razy tak wielká, iak CY. Weźmy liniią AG 2 razy tak wielką, iak CD: będzie GX dwa razy tak wielká, iak DY. A że DY, má bydź 4 razy tak wielká, iak FZ; więc GX, będzie 8 razy tak wielká, iak FZ. Zrobmy GH, 8 razy tak wielką, iak EF: będzie téż HX, 8 razy tak wielká, iak EZ: A że EZ, má bydź 3 razy tak wielká, iak BX; więc HX, będzie 24 razy tak wielká, iak BX, a HB, będzie 25 razy tak wielká, iak BX. Że zaś HB, wyrážá 700, a dwudziestá piątá część siédmiuset iest 28; więc BX, czyli maiątek B, iest 28 Zł: a zatém AX, czyli maiątek A, będzie 72 Zł.

Maiątki	A	72. Zł.
	B	28.
	C	36.
	D	64.
	E	84.
	F	16.

Algie-

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątki B . . . . x.
A . . . . $100 - x$.
E . . . . $3x$.
F . . . . . $100 - 3x$.
D . . . . . $400 - 12x$.
C . . . . $12x - 300$ (toieſt reſzta odiąwſzy $400 - 12x$ od 100)

Drugié wyrażénié maiątku A . . . . $24x - 600$.

Warunek. $24x - 600 = 100 - x$.

Przerábianié. (Dodáwſzy 600 po obu ſtronach) $24x = 700 - x$.
(Dodáwſzy x po obu ſtronach) $25x = 700$.
(Podzieliwſzy przez 25) . . . . . . $1x = 28$.

Reſzta rozwiązania zawiérá ſię iuż w poſtępowaniu przez rozumowanié.

Inſzé przykłady. Maiątki 6 oſób A, B, C, D, E, F, ſą takié, że,
A, i B, maią razém 61. Zł.
C, i D, ... 61.
E, i F, ... 61.

A, má 3 razy tylé, ilé C.
E, . . . 4 . . . . . B.
D, . . . 5 . . . . . F.

Maiątki 8 Oſób A, B, C, D, E, F, G, H, ſą takié, że
A, i B, maią razém 119. Zł.
C, i D, ... 119.
E, i F, ... 119.
G, i H, ... 119.

A, má 2 razy tylé, ilé C.
E, . . . 3 . . . . . B.
D, . . . 4 . . . . . G.
H, . . . 5 . . . . . F.

48. *Zadanié 30. Pewná osoba kupuie 20 łokci materyi dwoiakiego gatunku, iednego gatunku łokieć po Zł. 14, drugiégo po Zł. 12. Płaci zaś za wszystko Zł. 258.*

Iléż łokci kupuie z piérwszégo, a ilé z drugiégo gatunku?

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba saméy piérwszéy materyi kupiła łokci 20; tedyby za nie zapłacić powinna Zł. 280: ale że zapłaciła tylko 258 Zł. toiest mniéy 22 Zł. więc różnica 22 Zł. pokazuie nám, że i tańszéy dwoma Zł. materyi kupiła ta osoba. Tylé zaś łokci téy tańszéy materyi kupić musiała; ilé razy 2 znayduie się we 22. 2 we 22 znayduie się razy 11: więc 11 łokci kupiła po 12 Zł; a zatém 9 łokci po 14 Zł.

Liczba łokci po 12 Zł. . . . . . 11.
. . . . . 14 Zł. . . . . . 9.

Summa łokci . . . 20.

Zapłata za łokci 11, po 12 Zł. . . . . . 132. Zł.
. . . . . 9 . . 14 Zł. . . . . . 126.

Całá zapłata . . . . 258.

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczba łokci po Zł. 14 . . . . . . x.
. . . . 12 . . . $20 - x$.
Płácą za wszystkié łokcie po Zł. . . . . 14 . . . . . $14x$.
. . . . 12 . . . $240 - 12x$.

Całá zapłata . . . . . $240 + 2x$.

Warunek. $240 + 2x = 258$.

Przerábianié. (Odiąwszy 240 po obu stronach) $2x = 18$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . . . $x = 9$.

Rozwiązanié $x = 9$. Liczba łokci po Zł. 14.
$20 - x = 11$. Liczba łokci po Zł. 12.
$14x = 126$. Zł. Płáca za łokci 9 po 14 Zł.
$240 - 12x = 132$. Zł. Płáca za łokci 11 po 12 Zł.

$240 + 2x = 258$. Całá zapłata za łokci 20.

Inszé

Inſzé przykłady. Pewná oſoba, używá 36 robotników: iednym płaci na dzień po gr. 18, drugim po gr. 15. Wſzyſtkim zaś razém płaci na dzień gr. 576. Iléż było robotników naiętych na gr. 18, a ilé na gr. 15?

Niech znowu będzie liczba robotników 54, z których iedni biorą po gr. 20, a drudzy po gr. 17: a wſzyſcy razém biorą na dzień gr. 984. (Zapytanié to ſamo, co wyżéy.)

49. *Zadanié 31. Naymuie kto robotnika na 48 dni: płaci mu za każdy dzień, w który robi gr. 24, a wytrącá mu za ſtół w każdy dzień, w który nie robi gr. 12. Na końcu dni 48, płaci mu wſzyſtkiégo gr. 504. Iléż dni było roboty, a ilé próżnowania tego robotnika?*

Gdyby tén naięty człowiek był robił co dzień przez 48 dni; tedy na końcu byłby wziął gr. 1152: a że tylko odebrál gr. 504; więc nie robił codziennie, i dlá tego mniéy bierze 648 groſzami.

Za każdy dzień, w który nie robi mniéy bierze 36 groſzami, niżby mu ſię należało, gdyby był robił: więc cała różnica 648 groſzy pochodzi z wytrąconych 36 gr. tylé razy, ilé dni tén robotnik próżnowál. Jeżeli tedy 648 podzielimy przez 36, wieloráz pokaże liczbę dni przez które próżnowál. Tén wieloráz ieſt 18: więc 18 dni próżnowál, a zatém 30 dni prácowál.

Dni roboty	30.
Dni próżnowania	18.
Nagroda za 30 dni pracy	720 gr.
Wytrącénié za 18 dni próżnowania . . .	216.
Zapłata z wytrącéniém . .	504.

Algiebraicznie. Mianowanié.

Dni próżnowania	x.
Dni roboty	$48 - x$.
Nagroda za dni roboty	$1152 - 24x$.
Wytrącénié za dni próżnowania	$12x$.
Reſzta do wypłacénia	$1152 - 36x$.

Warunek. $1152 - 36x = 504$.

 Prze-

Przeráb: (Dodáwszy $36x$ po obu stronach) $1152 = 36x + 504$.
(Odiąwszy 504 po obu stronach) $648 = 36x$.
(Podzieliwszy przez 36) . . . . $1x = 18$.

Reszta rozwiązania zawiérá się w postępowaniu Arytmetycznèm.

Insze przykłady. Pewny rzémieślnik w każdy dzién w który robi prócz wydátku ochrániá sobie gr. 25: w każdy zaś dzién, w który nie robi wydaie gr. 15. W 64 dniach ochronił sobie gr. 640. Iléż dni przez tén czasu przeciąg, robił, a ilé nie robił?

600 Łokci materyi dwoiakiégo gatunku iest u dwóch kupców: u iednego łokieć po 24 Zł. u drugiégo po 16 Zł. Miéniaią się, i drugi dodaie piérwszému Zł. 440. Iléż łokci miáł 1wszy kupiec, ilé drugi?

50. *Zadanié 32. Naymuie kto pewną liczbę robotników, mężczyzn i kobiét. Jest mężczyzn 12 więcéy niż kobiét. Każdy mężczyzna bierze po gr. 18, a kobiéta po gr. 15. Wszystkim zaś razém daie się gr. 810. Iléż iest mężczyzn, ilé kobiét?*

Arytmetycznie. 12 Mężczyzn bierze razém 216 gr. i zostaie się od 810 gr. 594 groszy. Té 594 gr. maią bydź podzieloné między tylé kobiét, co i mężczyzn: kobiéta iedna z jednym mężczyzną biorą razém 33 gr: więc tylé będzie pár kobiét, i mężczyzn, ilé wypadnie z podzielénia 594 przez 33: wypádá zaś 18, więc oprócz 12 mężczyzn, było ieszcze 18 pár mężczyzn z kobiétami: a zatém było kobiét 18.

Liczba kobiét	18.
Liczba mężczyzn . . .	30.
Pláca kobiét	270. gr.
Pláca mężczyzn . . .	540. gr.
Całá zapłata . .	810. gr.

Algiebraicznie. Mianowanié.

Liczba kobiét . . .	x.
Liczba mężczyzn . .	$x + 12$.
Płáca kobiét . . .	$15x$.
Płáca mężczyzn . .	$18x + 216$.
Całá zapłata . . .	$33x + 216$.

Warunek.

Warunek. $33x + 216 = 810$.

Przerábianié. (Odiąwszy 216 po obu stronach) $33x = 594$.
(Podzieliwszy przez 33) . . . . . $1x = 18$.

Rozwiązanié. $x = 18$. Liczba kobiét.
Reszta iak wyżéy.

Inszé przykłady. Kupiono pewną liczbę łokci sukna po Zł. 14, i inszégo sukna po Zł. 16 więcéy 15 łokci niż piérwszégo. Dano za wszystko Zł. 750.

Má kto więcéy 30 sztuk w czerwonych Zł. niż w rublach: rachuie sobie czerwony Zł. po Zł. 18, a rubel po Zł. 7: co wszystko czyni mu Zł. 865. Iléż má czerwonych złotych, ilé rubli?

51. *Zadanié 33. Kupuie kto pewną liczbę łokci sukna po Zł. 17, a 8 łokci więcéy nad piérwszé, drugiégo sukna po Zł. 25. Płaci za tę drugą sztukę Zł. 392 więcéy, niż za piérwszą.*

Arytmetycznie. Gdyby tego drugiégo gatunku kupiono łokci 8, nie kupuiąc nic z gatunku piérwszégo; tedyby 200 Zł. dano więcéy za gatunek drugi, niż za piérwszy: toiest, danoby w saméy rzeczy 200 Zł. za gatunek drugi, a nic za piérwszy. A że oprócz tych 8 łokci gatunku drugiégo, kupuie się nad to równá liczba łokci z obudwóch gatunków, i w téy równéy liczbie łokci, więcéy się płaci (oprócz tamtych 200 Zł.) Zł. 192 za gatunek drugi niż piérwszy, z przyczyny, że każdy łokieć gatunku drugiégo, płaci się 8 Zł. drożéy, niż łokieć gatunku piérwszégo; więc podzieliwszy 192 przez 8 wieloráz 24, pokaże liczbę łokci gatunku piérwszégo, którégo łokieć płaci się tylko po Zł. 17.

Jest tedy po Zł. 17	łokci 24.	
po Zł. 25	32.	
Płáca za 32 łokcie po Zł. 25		800 Zł.
. . . . . 24 . . . . . 17		408.
Różnica płácy . .		392.

Algiebraicznie. Mian: Liczba łokci sukna po Zł. 17 . . . x.
. . . . 25 . . . $x + 8$.
Płáca za drugi gatunek . . . . $25x + 200$.
. . . za piérwszy . . . . $17x$.

Różnica . . . . $8x + 200$.

Warunek. $8x + 200 = 392$.

Przeráb: (Odiąwszy 200 po obu stronach) $8x = 192$.
(Podzieliwszy przez 8) . . . $1x = 24$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Liczba łokci po Zł. 17.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 15, má ich zaś 12 więcéy, których zgodził po gr. 24. Tym drugim płaci na dzién gr. 729. więcéy, niż piérwszym.

Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 20, a 16 więcéy, których zgodził po gr. 15: wydaie co dzién 80 gr. więcéy na piérwszych, niż na drugich.

Naymuie kto pewną liczbę robotników po gr. 24, a 20 więcéy, których zgodził po gr. 20. Wydaie co dzień na drugich więcéy 160 gr. niż na piérwszych.

52. *Zadanié 34. Kupuie kto 32 łokci materyi, dwoiakiégo gatunku, po 16, i po 12 Zł. Za piérwszy gatunek płaci 176 Zł. więcéy, niż za drugi: iléż łokci bierze z każdégo gatunku?*

Arytmetycznie. Gdyby się wzięło 32 łokci piérwszéy tylko materyi, tedyby za nię zapłacić przypádało Zł. 512, toiest więcéyby się za tę materyą płaciło 512 Zł. niż za drugą, któráby się wcale nie kupowała. A gdy się obadwa gatunki kupuią, różnica płácy iest tylko 176 Zł: która to różnicá, mnieyszá iest od piérwszéy 336 złotémi.

Za każdym łokciém z drugiégo gatunku kupionym na mieyscé piérwszégo zapłata za piérwszy gatunek zmniéyszá się 16 Zł. a zapłata za drugi gatunek powiększá się 12 złotémi: a zatém różnica tych dwóch summ zmnieyszá się za każdym łokciém kupionym z drugiégo gatunku 28 Zł: więc różnica calá 336 Zł. pochodzi z liczby 28 powtórzonych tylé razy, ilé było łokci drugiégo gatunku. Znaydziémy tedy tę liczbę łokci drugiégo gatunku, podzieliwszy 336, przez 28. Wieloráz będzie 12.

Liczba łokci 2giégo gatunku . . . . 12.
. . . . . . piérwszégo . . . . 20.

Zapłata

Zapłata za piérwszy gatunek . . . . 320 Zł.
za drugi . . . . . . 144.

Różnica . . . 176.

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczba łokci po Zł. 16 . . x.
po Zł. 12 . $32 - x$.

Zapłata za piérwszą liczbę łokci . . . . . $16x$.
Zapłata za drugą liczbę łokci . . . . $384 - 12x$.

Różnica płácy . . $28x - 384$.

Warunek. $28x - 384 = 176$.

Przeráb: (Dodáwszy 384 po obu stronach) $28x = 560$.
(Podzieliwszy przez 28) . . . $1x = 20$.

Rozwiązanié. $x = 20$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Kupuie kto 60 łokci, częścią po 28, a częścią po 24 Zł: płaci drugą ceną 608 złotych więcéy niż piérwszą.

Kupuie kto 48 łokci, częścią po 32 Zł. a częścią po 27 Zł. Płaci piérwszą ceną więcéy 297 Zł. niż drugą.

53. *Zadanié 35. Ogrodnik posádził pewną liczbę drzéwek w kwadrát pełny, i zostało mu drzéwek 8. Chciáłby ieszcze posadzić iedno drzéwko w każdym rzędzie, i przydadź rząd ieden dlá zachowania kwadratu, ale mu nie dostaie do tego drzewek 11. Iléż było drzéwek w każdym rzędzie, ilé rzędów, i ilé wszystkich drzéwek?*

Arytmetycznie. Kładąc następnie iednę, potém 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. kropek na każdy bok kwadratu, liczba kropek 1, 4, 9, 16, 25, 36, Fig. 12.
i t. d. kwadráty pełné czyniących ukazuie liczby takowéż drzéwek, któréby kwadraty napełnić mogły. Każdy kwadrát następny (iak figura, i iéy ułożénié pokazuie) má więcéy kropek od kwadratu poprzedzaiącégo, tylé dwoie, ilé ich má bok tegoż kwadratu poprzedzaiącégo, i nad to ieszcze iednę kropkę. Tak naprzykłád kwadrát, w którégo boku są 3 kropki, będzie miáł w sobie kropek 9, a kwadrát następny, w którégo boku iest 4 kropek, będzie miáł kropek 16, toiest 7 więcéy od kwadratu poprzedzaiącégo:

go: a 7 zawiérá w ſobie 2 razy 3, i nad to ieſzcze iedność. Ponieważ tedy po ułożonym piérwſzym kwadracie zoſtaie ogrodnikowi drzéwek 8, a brakúie mu ieſzcze drzéwek 11 do naſtępnégo kwadratu, więc gdyby miał 19 drzéwek, mógłby tén drugi kwadrát ułożyć: a zatém 19 ieſt liczba drzéwek dwa razy tak wielká, iak liczba drzéwek w rzędzie iednym piérwſzégo kwadratu, i nad to ieſzcze zawiérá w ſobie iedność. Liczba więc dwa razy zamykaiącá liczbę drzéwek, w każdym rzędzie piérwſzégo kwadratu, ieſt 18: a przeto liczba drzéwek w iednym z tych rzędów była 9.

I. Ułożénié.

Liczba drzéwek w każdym rzędzie	9.
Liczba rzędów	9.
Liczba drzéwek poſadzonych	81.
Liczba drzéwek pozoſtałych	8.
Liczba drzéwek wſzyſtkich	89.

II. Ułożénié.

Liczba drzéwek w każdym rzędzie	10.
Liczba rzędów	10.
Liczba drzéwek potrzebnych do tego ułożénia	100.
Liczba drzéwek brakuiących	11.
Liczba drzéwek wſzyſtkich	89.

Algiebraicznie. *I. Ułożénié.*

Mianowanié. Liczba drzéwek w każdym rzędzie . . x.
Liczba rzędów . . . . x.

Liczba drzéwek wſzyſtkich poſadzonych wyrażoná będzie, gdy liczbę drzéwek w każdym rzędzie rozmnożymy przez liczbę rzędów: toieſt gdy x, rozmnożymy przez x, czyli gdy x, weźmiémy razy x: coby ſię tak powinno wyrazić, $x \times x$. Zgodzono ſię iednak, aby opuſzczać znak rozmnożénia, i oznáczać to rozmnożénié, kładąc iednę literę przy drugiéy, tak iak niżéy:

Liczba drzéwek wypełniaiących 1wſzé ułożénié . . xx.
Liczba drzéwek wſzyſtkich . . . . $xx + 8$.

II. Uło-

II. *Ułożénié.*

Liczba drzéwek w każdym rzędzie . . $x+1$.
Liczba rzędów . . . . $x+1$.

Liczbę drzéwek któréby wypełniły 2gié ułożénié, wyrazimy rozmnożywfzy $x+1$, przez $x+1$. Wykonámy zaś to rozmnożénié mnożąc naprzód $x+1$, przez x, fkąd będzie $xx+1x$: mnożąc potém $x+1$ przez 1, fkąd będzie $1x+1$: a dodáwfzy $xx+1x$ do $1x+1$, będzie $xx+2x+1$.

Liczba więc drzéwek, któréby wypełniły drugié ułożénié ieft . . .
. . . . $xx+2x+1$.
Liczba zatém drzéwek ogrodnika będzie odiąwfzy 11 . . $xx+2x-10$.

Warun: $xx+2x-10=xx+8$.

(Odiąwfzy xx po obu ftronach) $2x-10=8$.
(Dodáwfzy 10 po obu ftronach) . . $2x=18$.
(Podzieliwfzy przez 2) . . . . $1x=9$.
Refzta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór Mnożénia.	
$x+1$.	Mnożnik.
$x+1$.	Mnożny.
$xx+x$.	Wieloczyn, przez x.
$x+1$.	Wieloczyn, przez 1.
$xx+2x+1$.	Wieloczyn cały.

54. *Uwága.* Té dwá wyrażénia xx, i $2x$, fą różné od fiebie: piérwfzé wypádá z rozmnożénia x, przez x, drugié z rozmnożénia x, przez 2. Jeżeli x, znáczy 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; tedy piérwfzé wyrażénié znaczyć będzie
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, i t. d. a drugié znaczyé będzie
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, i t. d. Ta różnica, tym fię większą bydź pokazuie, im znaczénié, x ieft większé. W tym tylko razie xx, i $2x$, iedno wyráżá, gdy x, znaczy 2. (Miiámy tu wáżność o, którąby czafém x, znaczyć mogło.)

Infzé przykłady. Znaléźć taki kwadrát, do którégo, każdégo boku przydáwfzy 1. ftopę, zrobi fię kwadrát infzy większy w powiérzchni od piérwfzégo, 25 ftopami kwadratowémi.

Znaleźć kwadrát taki, do którégo boków przydáwfzy po 2 ftopy, zrobi fię kwadrát większy od piérwfzégo w powiérzchni 40 ftopami kwadratowémi.

 Przy

Przykłád postępowania przez rozumowanie.

Fig. 13. Ponieważ w ostatnim przykładzie, kwadrát drugi większy iest od kwadratu piérwszégo, naprzód, dwoma prostokątami maiącémi w iednym boku po dwie stopy, a w drugim tylé długości, ilé má kwadrát piérwszy: powtóré kwadratém iednym, którégo bok każdy zawiérá 2 stopy, a zatém powiérzchniá 4 stopy kwadratowé; więc dwa tamté prostokąty razém wzięté, zawiérać będą 36 stóp kwadr: a każdy z nich mieć będzie 18 stóp kwadratowych. Każdy z tych dwóch prostokątów podzielić można na dwa równé prostokąty maiącé w szérokości stopę 1, a długość równą długości piérwszégo kwadratu. Będzie tedy powiérzchniá każdégo z tych ostatnich prostokątów 9 stóp: a że má w szérokości stopę 1; więc długość iego, a zatém i kwadratu piérwszégo będzie 9 stóp.

Bok 1go Kwadratu będzie . . . . 9 stóp.
Bok 2go Kwadratu . . . . 11 stóp.

Powiérzchniá 2go kwadratu . . . . 121 stóp kwadr.
Powiérzchniá 1go kwadratu . . . . 81 stóp kwadr.

Różnica tych powiérzchni . . . 40 stóp kwadr.

Algiebraicznie. Bok 1wszégo kwadratu . . . . x.
Powiérzchniá 1wszego kwadratu . . . . xx.

Bok 2go kwadratu . . . . $x+2$.
Powiérzchnia . . . . $xx+4x+4$.
Różnica dwóch powiérzchni . . . . . $4x+4$.

Warunek. $4x+4=40$.

(Odiąwszy 4) . . . . . $4x=36$.
(Podzieliwszy przez 4) $x=9$.

Rozwiąz: $x=9$. Bok 1wszégo kwadratu.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.

$x+2$. Mnożnik.
$x+2$. Mnożny.

$xx+2x$. Wieloczyn przez x.
$2x+4$. Wieloczyn przez 2.

$xx+4x+4$. Wieloczyn cały.

Inszé

Inſzé przykłady. Przydáwſzy do boku kwadratu ſtóp 3, 4, 5, 6, i t. d. powiérzchniá większá będzie ſtóp kwadr. 57, 88, 145, 168. i t. d.

55. *Zadanié 36 Mám proſtokąt dwa razy tak długi, iak ſzéroki: dodaię do każdégo boku po 1 ſtopie, i będę miáł powiérzchnią większą 19 ſtop kwadr. od piérwſzéy.*

Arytmetycznie. Różnicę tych dwóch proſtokątów rozłożyć mogę na dwa proſtokąty, maiącé iednę ſtopę ſzérokości, a długość równą bokóm piérwſzégo proſtokąta, i na kwadrát którégo bok ieſt na ſtopę: a zatém powiérzchniá zawiérá iednę ſtopę kwadratową. Będzie tedy ſumma dwóch proſtokątów 18 ſtóp kwadr. Że zaś ich ſzérokość ieſt iednakowá, a długość iednégo 2 razy tylá, ilá długość drugiégo; więc większy z tych proſtokąt mogę podzielić na dwa równé mnieyſzému, a ſumma wſzyſtkich trzech, równać ſię będzie trzém proſtokątóm równym tému proſtokątowi mniéyſzému. Má zatém iedén z tych trzech proſtokątów 6 ſtóp kwadr: a że ſtopę iednę má ſzérokości; więc długości mieć będzie ſtóp 6: która to długość równá ieſt ſzérokości piérwſzégo proſtokąta ſzukanégo. Fig. 14.

Szérokość 1go proſtokąta . . .	6 ſtóp.
Długość	12 ſtóp.
Powiérzchniá	72 ſtóp kwadr.
Szérokość 2go proſtokąta . . .	7 ſtóp.
Długość	13 ſtóp.
Powiérzchniá	91 ſtóp kwadr.
Różnica dwóch powiérzchni . .	19 ſtóp kwadr.

Algiebraicznie.

Szérokość 1go proſtokąta . . .	x.
Długość	$2x$.
Powiérzchniá	$2xx$.
Szérokość 2go proſtokąta . . .	$x+1$.
Długość	$2x+1$.
Powiérzchniá	$2xx+3x+1$.
Różnica dwóch powiérzchni	$3x+1$.

Warunek. $3x + 1 = 19$.

Przeráb: (Odiąwſzy 1) . . . $3x = 18$.
(Podzieliwſzy przez 3) $1x = 6$.

Rozwiązanié . . . . $x = 6$.

Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.
$2x + 1$. . . Mnożny.
$x + 1$. . . Mnożnik.
$2xx + x$. . Wieloczyn przez x.
$2x + 1$. Wieloczyn przez 1.
$2xx + 3x + 1$. Wieloczyn cały.

Inſzé przykłady. Gdy bok iedén proſtokąta ieſt 3, 4, 5, razy i t. d. tak wielki, iak drugi; tedy dodáwſzy po iednéy ſtopie do obudwóch, powiérzchniá drugá większá będzie od piérwſzéy, 29, 31, 37, i t. d. ſtopami kwadr.

Niech znowu bok iedén będzie 4 razy tak wielki, iak drugi: dodáwſzy 3 ſtopy do długości, a 2, ſtopy do ſzérokości iego; powiérzchniá drugá, większá będzie od piérwſzéy, 94 ſtóp. kwadr.

56. *Przeſtroga.* Przez takié przykłady wprowadzić trzeba uczniów do Algiebraicznégo mnożénia. W tym razie, gdy tak mnożnik, iak i mnożny więcéy niż iedén wyráz zawiéraią, a wſzyſtkié té wyrazy ſą przydayné; wieloczyném całym ieſt ſumma wieloczynów z mnożnégo, przez każdy w ſzczególności wyráz mnożnika.

W mnożéniu Algebraiczném zaczyná ſię zawſze od piérwſzégo po lewéy ręce wyrazu, tak w mnożniku, iak i w mnożnym. Tén ſpoſób poſtępowania náywygodnieyſzym był, gdy wyrazy ilości mnożnéy, lub mnożącéy miały przed ſobą odmienné znaki: i to było powodém do dania ogólnéy reguły.

W ułożéniu Wieloczynów z mnożnégo, przez każdą z oſobna część mnożnika, trzeba ſię ſtarać, aby wyrazy iednakowégo gatunku, piſać iedné pod drugiémi.

Przykłady mnożénia złożonégo, i w któré wchodzą ſamé tylko wyrazy przydayné.

I.

$2x + 1$. . . . . Mnożny.
$3x + 2$. . . . . Mnożnik.
$6xx + 3x$ . . . Wieloczyn przez $3x$.

$4x + 2$.

$4x + 2$. . . . Wieloczyn przez 2.

$6xx + 7x + 2$. Wieloczyn cały.

II.

$5x + 3$. . . . . Mnożny.
$4x + 6$. . . . . Mnożnik.

$20xx + 12x$. . . . . Wieloczyn przez $4x$.

$30x + 18$. . . . Wieloczyn przez 6.

$20xx + 42x + 18$. Wieloczyn cały.

57. *Zadanié 37. Jakiż ieſt tén kwadrát, od którégo iednégo boku, odiąwſzy 1 ſtopę, a do drugiégo przydáwſzy 2 ſtopy, zrobi ſię proſtokąt z tych dwóch boków tak odmiénionych większy w powiérzchni 10 ſtóp kwadr. od kwadratu?*

Niech będzie kwadrát AXYZ, którégo ſzukámy, a którégo bok AZ, zmnieyſzony ieſt ilością PZ, równą iednéy ſtopie, a bok AX, powiększony ieſt ilością QX, równą dwóm ſtopóm. Niech będzie AQRP, proſtokąt, przewyżſzaiący kwadrát AXYZ, 10 ſtopami kwadr: niech liniie ZY, QR, przeciągnioné przecinaią ſię w punkcie S, a liniie PR, XY, w punkcie T. Od kwadratu AXYZ, odięty ieſt proſtokąt PTYZ, a dodany proſtokąt QRTX. Więc różnica między proſtokątém AQRP, a kwadratém AXYZ, równá ſię różnicy między proſtokątém QRTX, a proſtokątém PTYZ. A że piérwſzá różnica má bydź równá 10 ſtóp. kwadratowym; więc i drugá. Że zaś proſtokąt TRSY, má w ſobie 2 ſtopy kw. przeto różnica między proſtokątém XQSY, a proſtokątém PTYZ, będzie 12 ſtóp kw. A ponieważ te dwa oſtatnié proſtokąty maią iednakową długość, toieſt równą długości boku kwadratu, a ſzérokość piérwſzégo dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość drugiégo; więc téż piérwſzy proſtokąt będzie dwa razy tak wielki, iak drugi: a zatém różnica między niemi równać ſię będzie drugiému proſtokątowi PTYZ. Tén więc proſtokąt PTYZ, má w ſobie 12 ſtóp kw: że zaś ſzérokości má tylko iednę ſtopę; więc długości mieć będzie 12 ſtóp. Ta długość ieſt bokiém kwadratu: więc i bok kwadratu 12 ſtóp zawiérá. Fig. 15.

Bok kwadratu . . . . 12 ſtóp.
Powiérzchniá . . . 144 ſtóp kw.

Szérokość proſtokąta 11 ſtóp.
Długość . . . 14 ſtóp.
Powiérzchniá . . 154 ſtóp kw.

Różnica dwóch powiérzchni . . . . 10 ſtóp kw.

Algiebraicznie. Mianowanié. Bok kwadratu ſzukanégo . . x.
Powiérzchniá . . . . xx.
Szérokość proſtokąta . . $x - 1$.
Długość . . . . $x + 2$.
Powiérzchniá proſtokąta . $xx + 1x - 2$.
Różnica 2ch powiérzchni $1x - 2$.

Warunek. $1x - 2 = 10$.

Przeráb: (Dodáwſzy 2) $1x = 12$.
Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Wzór mnożénia.

$x - 1$ . .	Mnożny.
$x + 2$ . .	Mnożnik.
$xx - 1x$.	Wieloczyn przez x.
$2x - 2$	Wieloczyn przez 2.
$xx + 1x - 2$.	Wieloczyn cały.

58. *Uwága.* Gdyby od iednégo boku kwadratu odięliśmy, a do drugiégo dodali tę ſamę liczbę ſtóp *np.* . . . . 1, 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. powiérzchniá zmnieyſzyłaby ſię . . . . 1, 4, 9, 16, 25, 36, i t. d. ſtopami kwadr. W takim razie, odmiana uczynioná w powiérzchni wyznaczoná ieſt przez odmiany uczynioné w bokach kwadratu, a przeto nie może ſłużyć za warunek.

Inſzé przykłady. Mám proſtokąt, którégo długość dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość. Gdy przydám do ſzérokości 3 ſtopy, a uymę od długości 2 ſtopy; powiérzchniá proſtokąta powiękſzy ſię 18 ſtopami kwadratowémi.

Mám proſtokąt, którégo długość trzy razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość. Gdy przydám 2 ſtopy do ſzérokości, a uymę 3 ſtopy od długości; powiérzchniá proſtokąta powiękſzy ſię 27 ſtopami kwadratowémi.

Przeſtroga. Té, i tym podobné przykłady tym końcém dáwané będą, aby wprowadzić Uczniów do mnożénia, w którém iedén, lub więcéy wyrazów kładzie ſię ze znakiém odeymowania —

59. *Przy-*

59. *Przykłady mnożénia złożonégo, w których ieden z czynników zawiérá ilości uiémné.*

I.

$2x - 2$. . . . . Mnożny.
$x + 3$. . . . . Mnożnik.

$2xx - 2x$ . . . Wieloczyn przez x.
$6x - 6$. . . Wieloczyn przez 3.

$2xx + 4x - 6$. Wieloczyn cały.

II.

$3x - 3$. . . . . . Mnożny.
$x + 2$. . . . . . Mnożnik.

$3xx - 3x$. . . . Wieloczyn przez x.
$6x - 6$ Wieloczyn przez 2.

$3xx + 3x - 6$. Wieloczyn cały.

III.

$4x - 5$. . . . . . Mnożny.
$3x + 2$. . . . . . Mnożnik.

$12xx - 15x$ . . . Wieloczyn przez $3x$.
$+ 8x - 10$. Wieloczyn przez 2.

$12xx - 7x - 10$. Wieloczyn cały.

Ponieważ iedna zawſze wypádá ilość z rozmnożénia, którąkolwiek ze dwóch ilości do mnożénia podanych, weźmiémy za mnożnégo, lub mnożnika; przeto w przykładach poprzedzaiących braliśmy za mnożną ilość tę, która wyráz uiémny zawiérała. Trzeba iednak wprawiać Uczniów w takié mnożénié, gdzie w ilość mnożącą wchodzi wyráz uiémny: tym końcém przykłady poprzedzaiącé wſpacznym porządkiém, tu ſię znowu podaią.

I.

$x + 3$. . . . . Mnożny.
$2x - 2$. . . . . Mnożnik.

$2xx + 6x$. . . . Wieloczyn przez $2x$.
$-2x - 6$. Wieloczyn przez -2.

$2xx + 4x - 6$. Wieloczyn cały.

Uwága. Gdyby $x + 3$ mnożyło ſię tylko przez $2x$, ilość ſtąd rozmnożoná byłaby $2xx + 6$: ale że przypádało mnożyć przez $2x$ zmnieyſzoné przez 2; więc wzięło ſię nad to $x + 3$ dwa razy: a zatém od piérwſzéy ilości rozmnożonéy $2xx + 6$, trzeba odiąć $x + 3$, dwa razy wzięté, toieſt trzeba odiąć $2x + 6$, albo, (co na iedno wychodzi) dodadź $- 2x - 6$.

II.

$x + 2$. . . . . Mnożny.
$3x - 3$. . . . . Mnożnik.

$3xx + 6x$ . . . . Wieloczyn przez $3x$.
$-3x - 6$. Wieloczyn przez -3.

$3xx + 3x - 6$. Wieloczyn cały.

III.

$3x + 2$. . . . . Mnożny.
$4x - 5$. . . . . Mnożnik.

$12xx + 8x$. . . . Wieloczyn przez $4x$.
$-15x - 10$. Wieloczyn przez -5.

$12xx - 7x - 10$. Wieloczyn cały.

60. *Zadanié 38. Mám kwadrát taki, od którégo iednégo boku odiąwſzy 1 ſtopę, a od drugiégo odiąwſzy 2 ſtopy, powiérzchniá zmnieyſzy ſię 22 ſtopami kwadr.*

Fig. 16. Niech będzie AXYZ, kwadrát taki, aby od iednégo boku iego AZ, odiąwſzy PZ, długość iednéy ſtopy, a od drugiégo boku AX, odiąwſzy QX, długość

długość dwóch ſtóp, i zrobiwſzy proſtokąt AQRP, z liniy AQ, AP, ténże kwadrát większy był od proſtokąta 22 ſtopami kwadr.

Niech PR, ſpotyká XY, w T, Nadmiarém kwadratu nad proſtokąt; będzie ſumma proſtokątów PTYZ, QXTR. Aby zaś mieliśmy tylko do czyniénia z proſtokątami, których długość równałaby ſię bokowi kwadratu; przedłużmy TX QR, ilościąmi Xt, Qr, z których każdá równałaby ſię iednéy ſtopie, i dokończmy proſtokąta $QXtr$, który zawiérać będzie 2 ſtopy kwadr. Summa proſtokątów PTYZ, QXTR, czynić powinna 22 ſtóp kwadr. więc ſumma proſtokątów PTYZ, $TRrt$, czynić będzie 24 ſtóp kwadr: a że ich długości ſą równé, a ſzérokość drugiégo $TRrt$, dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość piérwſzégo PTYZ; więc ich ſumma trzy razy będzie tak wielká, iak ténże piérwſzy proſtokąt PTYZ: więc proſtokąt PTYZ, trzy razy wzięty zawiérałby 24 ſtóp kwadratowych, a zatém ráz wzięty zawiérá 8 ſtóp kwadr. Że zaś má iednę ſtopę ſzérokości; więc długość iego, która oráz ieſt bokiém kwadratu, má 8 ſtóp.

Bok kwadratu ſzukanégo . . .	8	ſt:
Powiérzchniá	64	ſt: kw:
Szérokość proſtokąta . . .	6	ſt:
Długość	7	ſt:
Powiérzchniá	42	ſtóp kwadr.
Różnica dwóch powiérzchni	22	ſtóp kwadr.

Algieb: Mian:	Bok kwadratu ſzukanégo . . .	x.
	Powiérzchniá	xx.
	Szérokość proſtokąta . .	$x - 2$.
	Długość	$x - 1$.
	Powiérzchniá	$xx - 3x + 2$.

Spoſób poſtępowania w mnożéniu ilości $x - 2$ przez $x - 1$.

Gdyby przypádało mnożyć $x - 2$, *przez* x, ilość ſtąd rozmnożoná byłaby $xx - 2x$: a że przypádá mnożyć $x - 2$ przez liczbę mnieyſzą iednością; więc ſię wzięło $x - 2$ iedén ráz nad to: a zatém od $xx - 2x$, trzeba ieſzcze odiąć $x - 2$. Odiąwſzy ſamo x, byłoby $xx - 3x$: ale że ſię odięło 2 nadto; więc ié trzeba dodadź, i będzie $xx - 3x + 2$. Na iedno téż wynieſie, gdy do $xx - 2x$ dodámy $- x + 2$: wypadnie albowiém to ſamo co i wyżéy, toieſt $xx - 3x + 2$.

Różni-

Różnica dwóch powiérzchni wyráżá się odiąwszy $xx - 3x + 2$ od xx, i będzie $3x - 2$.

Warunek. $3x - 2 = 22$.

Przerábianié. (Dodáwszy 2) . . . $3x = 24$.
(Podzieliwszy przez 3) $1x = 8$.
Reszta iak wyżéy.

61. *Uwága.* Można tu było uniknąć mnożénia, w któréby wchodziły ilości uiémné.

I tak niech będzie szérokość prostokąta . . . . x.
a zatém bok kwadratu . . . . $x + 2$.
Długość prostokąta mnieyszá iednością od
boku kwadratu . . . . $x + 1$.
Powiérzchniá kwadratu będzie . . . . $xx + 4x + 4$.
Powiérzchniá prostokąta . . . . $xx + 1x$.
Różnica . . . . $3x + 4$.

Warunek. $3x + 4 = 22$.

Przeráb: (Odiąwszy 4) . . . . . . $3x = 18$.
(Podzieliwszy przez 3) . . $1x = 6$. Szérokość prostokąta.
$x + 2 = 8$. Bok kwadratu.

W szukaniu iednak rozwiązania podobnych zadáń, trzeba sobie za cél wystawiać, wprawianié Uczniów w takié mnożénié, w którégo ilość tak mnożącą, iako i mnożną wchodzą wyrazy uiémné.

Insze przykłady. Mám prostokąt, którégo długość, dwa razy iest tak wielká, iak szérokość: uymuię mu po iednéy stopie z każdégo boku, przez co powiérzchniá zmniéyszá się 20 stopami kwadr.

Mám prostokąt, którégo długość trzy razy iest tak wielká, iak szérokość: uymuię iedną stopę z szérokości, a 2 stopy z długości, przez co powiérzchniá zmniéyszá się 23 stopami kwadr.

62. *Przykłady mnożénia, w którém tak mnożny, iak i mnożnik zawiérá wyrazy uiémné.*

I.

$x - 1$. . . . Mnożny.
$2x - 1$. . . . Mnożnik.

$2xx - 2x$. . . Wieloczyn przez $2x$.
$- x + 1$. Wieloczyn przez $- 1$.

$2xx - 3x + 1$. Wieloczyn cały.

II.

$x - 1$. . . . Mnożny.
$3x - 2$. . . . Mnożnik.

$3xx - 3x$. . . Wieloczyn przez $3x$.
$- 2x + 2$. Wieloczyn przez $- 2$.

$3xx - 5x + 2$. Wieloczyn cały.

III.

$2x - 3$. . . . Mnożny.
$3x - 5$. . . . Mnożnik.

$6xx - 9x$. . . Wieloczyn przez $3x$.
$- 10x + 15$. Wieloczyn przez $- 5$.

$6xx - 19x + 15$. Wieloczyn cały.

W tych i inſzych przykładach używſzy rozumowania podobnégo przytoczonému w przykładzie piérwſzym tego Zadania, można potém przyſtąpić do téy ogólnéy reguły: *że gdy ſię mnożą ieden przez drugi dwa wyrazy z iednakowym znakiém, toieſt albo obadwa przydayné, albo obadwa uiémné; ilość z nich rozmnożoná będzie przydayná, czyli poprzedzoná znakiém dodáwania +: ieżeli zaś té dwa wyrazy będą miały odmiénné znaki, toieſt, ieżeli ieden będzie przydayny, a drugi uiémny; tedy ilość z nich rozmnożoná, będzie uiémná, czyli poprzedzoná znakiém odeymowania —.*

63. *Zadanié 39.* Znaléźć dwie liczby, którychby różnica była 4, a różnica ich kwadratów 72.

 Przez

Fig. 17. *Przez rozumowanié.* Niech liniiá AB, wyráżá różnicę daną liczb dwóch ſzukanych AX, BX, których różnica kwadratów także ieſt daná. Wykréślmy na tych liniiach AX, BX, kwadraty AXSP, BXYZ: różnicą tych dwóch kwadratów, ſą dwa proſtokąty, QYSP, i ABZQ, które obadwa iednakową maią ſzérokość, toieſt równą linii AB, a z których piérwſzy má za długość bok większégo kwadratu, a drugi má za długość, bok mnieyſzégo kwadratu. Będzie przeto ſumma tych dwóch proſtokątów, równá innému proſtokątowi téyże ſamey ſzérokości, a długości równéy ſummie długości tych dwóch proſtokątów, toieſt równéy ſummie dwóch boków dwóch kwadratów. A że ſzérokość tego proſtokąta miałaby 4 ſtopy, a powiérzchniá miałaby 72 ſtóp kwadratowych, więc długość powinna mieć ſtóp 18.

Zadanié tedy poprzedzaiącé, wychodzi na iedno, iak gdyby przypádało ſzukać dwóch liczb, których ſumma 18, a różnica 4. Té dwie liczby (podług zadania 39o) będą 11, i 7.

Kwadrát z 11	121.
Kwadrát z 7	49.
Różnica	72.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyſzá liczba . . . . x.
Większá . . . . $x + 4$.
Kwadrát większéy . . $xx + 8x + 16$.
Kwadrát mnieyſzéy . xx.

Różnica kwadratów $8x + 16$.

Warunek. $8x + 16 = 72$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 16) . . . . . $8x = 56$.
(Podzieliwſzy przez 8) . $1x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$. Mnieyſzá liczba.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby, których różnica ieſt 6: a różnica kwádratów: 120.

Znaléźć dwie liczby, których różnica ieſt 8, a różnica kwadratów 144.

64. *Zadanié 40. Znaléźć dwie liczby, których ſumma ieſt 18, a różnica kwadratów 72.*

Przez

Przez rozumowanie. W figurze zadania poprzedzaiącégo ſumma proſtokątów AQZB, PQYS, która ieſt różnicą kwadratów z AX, i z BX; równá ſię proſtokątowi maiącému za ſzérokość różnicę ſzukaną dwóch liniy AX, BX, a za długość ſummę daną 18. A że powiérzchniá tego proſtokąta ieſt 72; więc różnica, którey ſzukámy, znalezioná będzie, podzieliwſzy 72 przez 18, i ta będzie 4. Zadanié więc wypádá na iedno, iak gdyby nám ſzukać przypádało dwóch liczb, których różnica ieſt 4, a ſumma 18, podobnie iak w zadaniu poprzedzaiącém.

Algiebraicznie. Mian: Mnieyſzá liczba . . . . . x.
Większá . . . . $18 - x$.
Kwadrát z większéy $324 - 36x + xx$.
Kwadrát z mnieyſzéy . . . . . . xx.

Różnica kwadratów . . $324 - 36x$.

Warunek. $324 - 36x = 72$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $36x$) . . . . $324 = 72 + 36x$.
(Odiąwſzy 72) . . . . $252 = 36x$.
(Podzieliwſzy przez 36) $1x = 7$.

Rozwiązanié. $x = 7$.
$18 - x = 11$.

Sprádwdzénié. $324 - 36x + xx = 121$. Kwadrát większéy liczby.
$xx = 49$. kwadrát mnieyſzéy.

$324 - 36x = 72$. Różnicá kwadratów.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby, których ſumma ieſt 24, a różnica kwadratów 192.

Znaléźć dwie liczby, których ſumma ieſt 32, a różnica kwadratów 192.

65. *Różné Zadania zabawné.*

I.

Má kto kárt 32: trzy z nich wyciągá, i na każdą z tych trzech kárt tylé innych kładzie, ilé téy karcie ók brakuie do dopełniénia liczby 15. Zoſtaie mu kárt 8, iakáż ieſt ſumma ók w trzech kartach na ſpodzie położonych?

Ary-

Arytmetycznie. Summa ók każdéy z tych trzech kárt i liczby kárt innych na niéy położonych powinna bydź 15: trzy więc takié ſummy uczynią 45. Ponieważ zaś wſzyſtkich kárt wzięło ſię 32, ſpodnich ieſt 3, a pozoſtałych 8, co uczyni 11: więc kárt wſzyſtkich położonych na trzech ſpodnich będzie 21: a zatém różnica 21, od 45, toieſt 24, będzie liczbą oznáczaiącą ſummę ók, w 3 kartach ſpodnich.

Algieb: *Mian:* Summa ók we trzech kartach ſpodnich . . x.
Summa kárt wiérzchnich . . . . . . $45 - x$.
Summa kárt w 3 kupkach . . . . . $48 - x$.

Ponieważ wſzyſtkich kárt było 32, a 8 ſię zoſtało, więc w trzech kupkach będzie kárt 24.

Warunek. $48 - x = 24$.

Przeráb: (Dodáwſzy x) $48 = 24 + x$.
(Odiąwſzy 24) $24 = x$.

Rozwiązanié. $x = 24$. Summa ók w trzech kartach ſpodnich.
$45 - x = 21$. Summa kárt wiérzchnich.
$48 - x = 24$. Summa kárt we 3 kupkach.

Inſzé przykłady. Ze 32 kárt wyciągámy 4, i na każdéy z tych 4, kładziémy tylé kárt, ilé iéy okóm nie doſtaie, do dopełniénia liczby 12. Zoſtaie kárt 5.

Z kárt 52 wyciągámy 5, i tylé innych na każdą kładziémy, ilé iéy okóm nie doſtaie do dopełniénia liczby 16. Zoſtaie kárt 10.

II.

Oſoba, A, mówi do B, aby ſobie pomyśliła liczbę iaką, aby ią popodwoiła, do podwoionéy przydała 8, i całéy ſummy, aby wzięła połowę. B, wykonáwſzy to wſzyſtko, wyiawiá przed A, ſamę tylko oſtatnią liczbę i mówi że má 10. Jakże ſobie poſtąpi A, chcąc dóyśdź piérwſzéy liczby od B, pomyślanéy?

Gdyby oſoba A, nic nie kázała dodáwać do podwoionéy liczby, tedy dwa działánia, iedno podwoiénia liczby, drugié podzielénia iéy na połowę, zniſzczyłyby ſię iedno przez drugié, i połowa liczby podwoionéy, byłaby tą ſamą liczbą, którą oſoba B, pomyślała. Ale że B, podwoiwſzy liczbę pomyślaną

myślaną dodała do niéy 8, i téy dopiéro summy wzięła połowę; więc ta połowa będzie summą liczby pomyślanéy, i połowy ośmiu, toiest 4. Ponieważ zaś ta ostatnia summa iest 10; więc liczba pomyślana iest cztéréma mnieyszá, a zatém iest 6.

Liczba pomyślaná	6.
Taż podwoioná	12.
Powiększoná ośmią	20.
Połowa téy summy	10.

Algiebr: Mian: Liczba pomyślaná . . . . . x.
Podwoioná . . . . $2x$.
Powiększoná ośmią . . . . $2x + 8$.
Połowa . . . . $x + 4$.

Warunek. $x + 4 = 10$.

Przerábianié. (Odiąwszy 4) $x = 6$.
Reszta iak wyżéy.

Inszé przykłady. Osoba B, troi tę liczbę, którą pomyślała, do potroionéy dodaie 15, a wziąwszy trzecią część téy summy, má 12.

B, mnoży liczbę pomyślaną przez 4, do rozmnożonéy przez 4, dodaie 12, i bierze czwártą część téy summy: wypádá 13 na wielorác.

III.

W sali kwadratowéy iest 8 kómórek równych przy cztérech ścianach téy sali, po trzy przy każdéy ścianie. W każdéy kómórce miészká trzech Uczniów: z tych wychodzi 4, a pozostali tak się w kómórkach rozstawiaią, że liczba ich w każdym rzędzie kómórek iest ta sama co i przedtém, gdy wszyscy byli przytomni.

Arytmetycznie. Liczba Uczniów postawionych naprzód w iednym rzędzie kómórek, iest 9: bo we dwóch kómórkach narożnych iest ich 6, a w każdéy kómórce śrzedniéy, iest ich 3.

Ponieważ wszystkich kómórek iest 8, a w każdéy po 3 Uczniów; więc wszystkich Uczniów było naprzód 24. Cztérech z nich wyszło, więc zostało się 20. Ci pozostali Uczniowie maią się mieścić w 4 kómórkach śrzednich, i w 4 narożnych: a zatém liczba ich w iednéy kómórce śrzedniéy, i w iednéy narożnéy, będzie czwártą częścią 20, toiest 5. Że zaś liczba po-

mieſzczonych we dwóch kómórkach narożnych, i w iednéy śrzédniéy powinna bydź 9; więc w iednéy kómórce narożnéy tylé ſię ich mieścić powinno, ilá ieſt różnica 5 od 9, toieſt 4. W każdéy przeto śrzedniéy kómórce, będzie tylko po 1 Uczniu.

Algiebraicznie. Liczba Uczniów w jednéy kómórce narożnéy . . . x.
. . . . . . we dwóch narożnych . . . . . $2x$.
. . . . . . w jednéy śrzedniéy . . . . $9 - 2x$.
. . . . . . we cztérech narożnych . . . . . $4x$.
. . . . . . we cztérech śrzednich . . $36 - 8x$.

. . . . . . we wſzyſtkich 8 kómór. . $36 - 4x$.

Warunek. $36 - 4x = 20$.

Przerábianié. (Dodáwſzy $4x$) . . . . $36 = 20 + 4x$.
(Odiąwſzy 20) . . . . $16 = 4x$.
(Podzieliwſzy przez 4) $4 = 1x$.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Liczba tych oſób nie zmnieyſzá ſię ale powiękſzá liczbą 4 lub 8.

Niech znowu liczba oſób w każdéy kómórce będzie 5, i niech wſzyſtkich liczba zmnieyſzá ſię liczbą 4, lub 8: albo powiękſzá cztérema, ośmią, dwunaſtą lub ſzeſnáſtą.

ROZDZIÁŁ II.

Zagádniénia, w które wchodzą ilości ułómkowé.

W Rozdziele poprzedzaiącym, takich ſię dobiérało przykładów, gdzie ſamé tylko wchodziły ilości cálkowité. W tym co idzié Rozdziele, z ułómkami ſzczególniéy miéć do czyniénia będziémy.

66. *Zadanié* 1. *Pewná oſoba włożyła w jedén handel trzecią część ſwégo maiątku, a w drugi czwártą część tegoż maiątku. Zoſtało iéy ſię Zł.* 15000.

15000. Jakiż był iéy cały maiątek, i iak wielé z niego włożyła w każdy z tych dwóch handlów?

Arytmetycznie. Summa trzeciéy i czwártéy części maiątku téy osoby iest summa $\frac{4}{12}$ i $\frac{3}{12}$, toiest $\frac{7}{12}$ iéy maiątku. Włożywszy więc w obadwa handle $\frac{7}{12}$ maiątku swégo, zostanie iéy się $\frac{5}{12}$: a zatém té $\frac{5}{12}$ ważą 15000 Zł. Jedna taká dwunástá część wáży 300 *Zł.* a przeto cały maiątek toiest 12 ray $\frac{1}{12}$, wáżyć będzie 12 razy 3000 Zł. toiest 36000 Zł.

Maiątek téy osoby . . .	36000 Zł.
Część w piérwszy handel włożoná . .	12000.
Część w drugi handel włożoná	9000.
Część pozostałá	15000.
Summa tych trzech części	36000 Zł.

Algiebr: Mian: Maiątek téy osoby . . . . . x.
Część włożoná w piérwszy handel . $\frac{1}{3}x$.
Część włożoná w drugi handel . . . $\frac{1}{4}x$.

Warunek. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 15000 = x$.

Przeráb: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{4}{12}x + \frac{3}{12}x + 15000 = x$.
(Dodáwszy ułómki) . . $\frac{7}{12}x + 15000 = x$ albo $= \frac{12}{12}x$.
(Odiąwszy $\frac{7}{12}x$ po obu stronach) . . $15000 = \frac{5}{12}x$.
(Podzieliwszy przez 5 obie strony) $3000 = \frac{1}{12}x$.
(Rozmnożywszy przez 12 obie str:) $36000 = x$.

Rozwiązanié. $x = 36000$.

Reszta rozwiązania, tak, iak w postępowaniu Arytmetycznem.

Insze przykłady. Pewná osoba włożyła w jedén handel trzecią część swégo maiątku, a w drugi $\frac{2}{5}$ tegoż maiątku. Zostało iéy się Zł. 20000.

Pewná osoba włożyła w jedén handel $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, a w drugi, $\frac{3}{7}$. Zostało iéy się 24000 Zł.

67. *Zadanié 2. Pewná osoba włożyła w handel $\frac{2}{3}$ swégo maiątku, a kupiła dóm za $\frac{2}{7}$ tegoż maiątku. Summa tych dwóch części czyni 40000 Zł. Jakiż iest iéy cały maiątek?*

Arytmetycznie. Summa złożona z $\frac{2}{3}$ i z $\frac{2}{7}$ maiątku téy osoby, iest summą z $\frac{14}{21}$, i z $\frac{6}{21}$, toiest $\frac{20}{21}$. Aże ta summa $\frac{20}{21}$, wynosi na 40000 Zł: więc $\frac{20}{21}$, maiątku téy osoby ważą 40000 Zł: a $\frac{1}{21}$ ważyć będzie 20 razy mniéy, toiest 2000 złotych. Cały więc maiątek téy osoby będzie 21 razy 2000 Zł. toiest 42000 Zł.

Cały maiątek téy osoby . . .	42000 Zł.
$\frac{2}{3}$ tego maiątku	28000.
$\frac{2}{7}$	12000.
Summa tych dwóch części . . .	40000.

Algiebraicznie. Cały téy osoby maiątek . . . . x.
$\frac{2}{3}$ tego maiątku . . . . . . $\frac{2}{3}x$.
$\frac{2}{7}$ . . . . $\frac{2}{7}x$.

Warunek. $\frac{2}{3}x + \frac{2}{7}x = 40000.$

Przeráb: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{14}{21}x + \frac{6}{21}x = 40000.$
(Dodáwszy dwa ułómki) . . . . . . $\frac{20}{21}x = 40000.$
(Podzieliwszy przez 20) . . . . . . $\frac{1}{21}x = 2000.$
(Rozmnożywszy przez 21) . . . . . . $1x = 42000.$

Rozwiązanié. $x = 42000.$

Reszta rozwiązania tak, iak w postępowaniu Arytmetyczném.

Inszé przykłady. Pewná osoba dała na zysk w jedno mieysce $\frac{3}{4}$ swégo maiątku, a w drugié $\frac{2}{9}$. Dała zaś ze wszystkiém 70000 Zł.
Inszá osoba dała na zysk $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{7}$ swégo maiątku, a ze wszystkiém dała Zł. 58000.

68. *Zadanié 3. Pewná osoba, rachuiąc zbiór, i wydaték roczny, znayduie, iż zebrała summę równaiącą się $\frac{5}{8}$ iéy maiątku, a wydała $\frac{2}{5}$ tegoż maiątku. Więcéy zaś 27000 zebrała niż wydała.*

Arytmetycznie. Różnica między $\frac{5}{8}$ i $\frac{2}{5}$, albo między $\frac{25}{40}$ i $\frac{16}{40}$, toiest $\frac{9}{40}$ okazuie różnicę między wydátkiém, i zbiorém téy osoby. Że zaś ta osoba zebrała więcéy 27000 Zł. niż wydała; więc $\frac{9}{40}$ całégo maiątku, ró-

wnaią

wnaią ſię 27000 Zł. a zatém $\frac{1}{40}$ uczyni tylko dziewiątą część Zł. 27000, toieſt 3000 Zł. A że ta oſoba miała 40 razy 3000 Zł. więc cały iéy maiątek był 120000 Zł.

Maiątek téy oſoby	120000 Zł.
$\frac{5}{8}$ tego maiątku, toieſt zbiór roczny, téy oſoby	75000 Zł.
$\frac{2}{5}$ tego maiątku, toieſt wydátek roczny, téy oſoby	48000 Zł.
Różnica między wydatkiém i zbiorém . .	27000.

Algiebr: Mian: Maiątek téy oſoby . . . . . x.
Zbiór roczny . . . . . . $\frac{5}{8}x$.
Wydátek roczny . . . . . . $\frac{2}{5}x$.

Warunek. $\frac{5}{8}x - \frac{2}{5}x = 27000.$

Przeráb: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{25}{40}x - \frac{16}{40}x = 27000.$
(Wykonáwſzy oznaczoné odeymowanié) $\frac{9}{40}x = 27000.$
(Podzieliwſzy przez 9) . . . . . . $\frac{1}{40}x = 3000.$
(Rozmnożywſzy przez 40) . . . . . . $1x = 120000.$

Rozwiązanié. $x = 120000$ *Zł.* Maiątek ſzukany.

W poſtępowaniu Arytmetycznym, mámy wzór reſzty rozwiązania.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba zyſkała $\frac{5}{7}$ ſwégo maiątku, a ſtraciła $\frac{3}{8}$. Zyſk przewyżſzá ſtratę 57000 złotémi.

Dwie robotników kupy użyté ſą do kopania rowu: iedna z nich wykopała $\frac{5}{9}$, a drugá $\frac{2}{7}$ tego rowu: piérwſzá zaś wykopała więcéy 510 ſążni, niż drugá. Ileż ſążni wykopały obiedwie té kupy?

69. *Zadanié 4. Dwie oſoby oddaloné na 340 mil iadą ku ſobie. Jedna uieżdżá 2 mile we trzech godzinach, a drugá uieżdżá 3 mile we 4 godzinach. Kiedyż ſię z ſobą zjadą, i ilé mil każda z nich uiedzie, nim ſię ſpotkaią?*

Arytmetycznie. Piérwſzá z tych oſób uieżdżá na godzinę trzecią część dwóch mil, albo $\frac{2}{3}$ iednéy mili, drugá uieżdżá na godzinę czwártą część trzech mil, albo $\frac{3}{4}$ iednéy mili. W iednéy więc godzinie przybliżaią

 ſię

ſię do ſiebie, ſummą $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ iednéy mili, toieſt $\frac{17}{12}$ mili, a zátém we 12 godzinach, przybliżaią ſię na mil 17. Tylé więc razy iazdę ſwoię dwunaſtogodzinną té oſoby powtórzyć powinny, ilé razy powtórzyć trzeba 17 mil, aby przyśdź do mil 340. Doydziémy zaś tego, dzieląc 340 przez 17. Wieloráz 20, ukaże, iż 20 razy uiechać trzeba było tym oſobóm mil 17, aby przeiechały całą odległość mil 340, i razém okáże, iż 20 razy 12 godzin, toieſt 240 godzin na tę drogę łożyć należało.

Godziny całéy iazdy . . . 240.

Jazda 1wſzéy oſoby $\frac{2}{3}$ mili wzięté 240 razy, toieſt 160 mil.
Jazda 2giéy oſoby $\frac{3}{4}$ mili wzięté 240 razy, toieſt 180.
Droga przez obiedwie oſoby przeiechaná . . . 340.

Możná było doyśdź tego ſamégo, przez naſtępuiącé rozumowanié.

Ponieważ piérwſzá oſoba uieżdżá mil 8, a drugá mil 9 w godzinach 12; więc w iakimkolwiek przeciągu czaſu, mile od tych oſób uiechané, będą ſię miały do ſiebie, iak liczby 8 i 9. Summa zaś mil od obudwóch oſób uiechanych, mieć ſię będzie do mil od iednéy oſoby uiechanych, iak 17 do 8, albo 9. Gdy tedy całą drogę, toieſt mil 340, podzielimy na 17 części równych, (z których każdá zawiérać będzie mil 20) piérwſzá z tych oſób uiedzie 8 razy, tę część toieſt uiedzie mil 160, a drugá uiedzie też ſamę część razy 9, toieſt uiedzie mil 180.

Algiebr: Mian: Liczba godzin całéy iazdy . . . x.
Droga uiechaná przez piérwſzą oſobę
$\frac{2}{3}$ mili razy x, toieſt . . . . $\frac{2}{3}x$.
Droga uiechaná przez drugą oſobę
$\frac{3}{4}$ mili razy x, toieſt . . . . $\frac{3}{4}x$.

Warunek. $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}x = 340$.

Przerób: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{8}{12}x + \frac{9}{12}x = 340$.
(Wykonáwſzy oznaczoné dodáwanié) . $\frac{17}{12}x = 340$.
(Podzieliwſzy przez 17) . . . . $\frac{1}{12}x = 20$.
(Rozmnożywſzy przez 12) . . . . $1x = 240$.

Roz-

Rozwiązanié. $x = 240$. Godziny ſzukané.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Jedna ze dwóch oſób uieżdżá 5 mil w ſześciu godzinach, a drugá uieżdżá 6 mil w ſiédmiu godzinach. Oddaloné ſą od ſiebie na mil 142.

Poſpiech iazdy iednéy oſoby, ieſt 6 mil w 5 godzinach, drugiéy 4 mile we trzech godzinach: odległość 152 mil.

70. *Zadanié 5. Złodziéy uciekaiąc, 3 mile w 4 godzinach ubiegá. Pogóń we 28 godzin po ucieczce za nim wyſłaná, ubiégá 4 mile we 3 godzinach. Za iléż godzin złodziéy będzie dogoniony?*

Arytmetycznie. Złodziéy ubiegá na godzinę $\frac{3}{4}$ mili: więc we 28 godzin, ubiegł 28 razy $\frac{3}{4}$ mili, toieſt ubiegł 21 mil, nim pogóń za nim wyſłana. Ta pogóń ubiegá $1\frac{1}{3}$ mili na godzinę, i zbliżá ſię co godzina ku złodzieiowi tylé, ilá ieſt różnica $\frac{3}{4}$ mili od $1\frac{1}{3}$, toieſt zbliżá ſię ku złodzieiowi ſummą $\frac{1}{4}$, i $\frac{1}{3}$ mili, czyli $\frac{7}{12}$ mili: więc w 12 godzinach zbliży ſię ku złodzieiowi na mil 7: a przeto tylé razy przez 12 godzin gonić złodzieia potrzeba, ilé razy 7 mil powtórzoné czynią 21 mil: doydziémy zaś tego, dzieląc 21 przez 7, ſkąd wypadnie wieloráz 3: więc 3 razy przez 12 godzin, toieſt przez 36 godzin gonić má pogóń złodzieia, nim go dogoni. Złodziéy zaś uciekáł przez 28 godzin dłużéy, toieſt uciekáł ze wſzyſtkiém przez 64 godzin.

Albo tak: Pogóń ubiégá na godzinę $\frac{4}{3}$ mili, złodziéy $\frac{3}{4}$, albo pogóń $\frac{16}{12}$ mili, a złodziéy $\frac{9}{12}$: więc w iednakowym przeciągu czaſu, tak ſię má droga ubieżoná od pogoni, do drogi ubieżonéy od złodzieia, iak 16 do 9: a zatém, i różnica tych dróg w iednym czaſie ubieżonych mieć ſię będzie do drogi ubieżonéy od pogoni, iak 7 do 16, a do drogi ubieżonéy od złodzieia, iak 7 do 9. Ażeta różnica drogi na początku wyiazdu pogoni ieſt 21 mil, albo trzy razy 7 mil; więc też i drogi ubieżoné w iednym czaſie od pogoni i od złodzieia, będą do ſiebie iak 3 razy 16, do 3 razy 9, albo iak 48 mil, do 27: i piérwſzá z tych liczba 48 przewyżſzá drugą 27, tak iak w ſaméy rzeczy przewyżſzać powinna liczbą 21.

Algiebr: Mian:	Godziny pogoni	x.
	Godziny ucieczki złodzieia . .	$x + 28$.
	Droga ubieżoná od pogoni . .	$\frac{4}{3}x$
	Droga ubieżoná od złodzieia :	$\frac{3}{4}x + 21$.

Waru-

Warunek. $\frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x + 21.$

(Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika) $\frac{16}{12}x = \frac{9}{12}x + 21.$

(Odiąwſzy $\frac{9}{12}x$) . . . . $\frac{7}{12}x = 21.$

(Podzieliwſzy przez 7) . . . . . $\frac{1}{12}x = 3.$

(Rozmnożywſzy przez 12 . . . . . $1x = 36.$

Rozwiązanié $x = 36.$ Godziny pogoni.
$x + 28 = 64.$ Godziny ucieczki złodzieia.
$\frac{4}{3}x = 48.$ Droga ubieżoná przez pogóń.
$\frac{3}{4}x + 21 = 48.$ Droga ubieżoná przez złodzieia.

Inſzé przykłady. Dwa okręty idą ku ſobie: iedén uchodzi 5 mil w 4 godzinach, drugi 4 mile w 5 godzinach: nim ſię znidą pierwſzy uydzie 36 mil więcéy, niż drugi. Iléż każdy z nich uydzie nim ſię znidą, i iaká ieſt ich pierwſzá odległość?

Kupuie kto pewną liczbę ſukna iednégo, i płaci 3 Cz. Zł. za 5 łokci. Kupuie tyléż łokci i ſukna drugiégo, i płaci 4 Cz. Zł. za 7 łokci. Zapłacił 8 Cz. Zł. więcéy za pierwſzé, niż za drugié. Iléż było łokci?

Dwa Skaźniki, *czyli* Indexy *zegarka, godzinny i minutowy, zſzedłſzy ſię razém w godzinę* np. *południową; kiedyż znowu zeydą ſię razém?*

Lubo to oſtatnié Zagádniénié, tegoż ieſt co i dwa poprzedzaiącé gatunku, że iednak Uczniowie mogliby tego nie poſtrzédz, przeto ſię tu tak wyłuſzczá.

Arytmetycznie. Skaźnik godzinny przechodzi w tym ſamym czaſie od iednégo podziału godzinnégo, do drugiégo naſtępuiącégo, w którym ſkaźnik minutowy obchodzi całe koło, czyli 12 podziałów godzinnych: a zatém ſkaźnik minutowy w równym czaſie 12 razy tylé ubiegá, ilé ſkaźnik godzinny. Różnica więc tych dwóch biegów, ieſt 11 razy tak wielká, iak bieg ſkaźnika godzinnégo.

A że droga ubieżoná od ſkaźnika minutowégo (rachuiąc ią od iednégo ſpotkania ſię z ſkaźnikiém godzinnym, do naſtępuiącégo) ieſt większá całym obwodém podziału, od drogi w równym czaſie ubieżonéy od ſkaźnika godzinnégo; więc cały tén obwód podziału równá ſię drodze, którą przebiegá ſkaźnik godzinny od iednégo ſpotkania ſię do drugiégo naſtępuiącégo, wziętéy razy 11. A zatém ta droga ſkaźnika godzinnégo czyni iedénaſtą część całégo obwodu podziału, toieſt w czaſie ią rachuiąc, czyni 5 minut pierwſzych, 27 drugich, i coś więcéy.

Algiebr:

Algiebraicznie. Wystáwmy sobie koło, które obiegaią obadwa skazniki w zégarku podzielone na 12 równych części, z których każdá wyráżá czas godzinny.

Mianowanié. Droga ubieżoná od skaźnika godzinnégo między iedném, i drugiém następném spotkaniém . . . . x.

Droga ubieżoná w tymże czasie od skażnika minutowégo . . . $12x$ albo $x + 12$.

Warunek. $12x = x + 12$.

Przerábianié. $11x = 12$.

$1x = \frac{12}{11} = 1\frac{1}{11}$.

Rozwiązanié. $x = 1\frac{1}{11}$. Droga ubieżoná od skażnika godzinnégo.

$12x = 12\frac{12}{11} = 13\frac{1}{11}$. Droga ubieżoná w iednymże czasie od skaźnika minutowégo.

$x + 12 = 1\frac{1}{11} + 12 = 13\frac{1}{11}$. Drugié wyrażénié drogi ubieżonéy od skaźnika minutowégo.

71. *Zadanié 6. Woda płynącá iednym kanáłém może napełnić kádź, w którą wpływá 3 razy w 7 dniach: taż woda wypływaiąc innym kanáłém, może wypróżnić tę kádź 2 razy w 5 dniach. Otworzywszy obadwa té kanáły, iléż czasu trzeba będzie do napełniénia kadzi? (przypuściwszy, że woda płynie iednostaynie w obudwóch kanáłach.)*

Arytmetycznie. Woda wpływaiącá do innéy kadzi 3 razy tak wielkiéy, iak kádź daná, napełniłaby 7mą iéy część we dniu iednym, a zatém napełniá w tym czasie $\frac{3}{7}$ kadzi danéy. Taż woda, gdyby wypływała z kadzi dwa razy tak wielkiéy, wypróżniłaby piątą iéy część we dniu iednym, a zatém w tymże czasie wypróżni $\frac{2}{5}$ kadzi danéy. Więc po skończonym dniu iednym płyniénia, i wypłyniénia, tylé wody zostanie w kadzi danéy, ilá iest różnica $\frac{2}{5}$ od $\frac{3}{7}$, albo $\frac{14}{35}$ od $\frac{15}{35}$, toiest zostanie $\frac{1}{35}$ część kadzi, tą wodą przez dzień napełnioná. Więc po drugim dniu napełnią się $\frac{2}{35}$ téyże kadzi i t. d. a za dni 35 napełnią się $\frac{35}{35}$ téy kadzi, toiest cała kádź za dni 35 będzie napełnioná.

Albo tak: Ponieważ 35 iest to liczba, która tak przez 5, iako i przez 7 bydź może podzieloną; wystáwmy więc sobie tę kadź, iakoby podzieloną

 na 35

na 35 równych części. Piérwszym kanálém płynącá woda w 7 dniach, napełniłaby 105 takich części, a w jednym dniu 15 części. Drugim kanálem wypływaiącá woda, w 5 dniach wypróżniłaby 70 takichże części, a w jednym dniu 14 części. Więc gdy razém wpływać, i wypływać woda będzie, zostanie iéy w kadzi iedna tylko taká część. A że 35 takich części napełnią kádź całą; więc w 35 dniach będzie napełnioná.

Algiebr: Mian: Liezba dni szukaná . . . . x.
Piérwszym kanálém napełniaią się w jednym dniu $\frac{3}{7}$ kadzi: więc w x dniach . . . $\frac{3}{7}x$.
Drugim kanálém wypływaią $\frac{2}{5}$ kadzi w jednym dniu: więc w x dniach . . . . $\frac{2}{5}x$

Warunek. $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 1$.

Przeráb: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{15}{35}x - \frac{14}{35}x = 1$.
(Wykonáwszy oznaczoné odeymowanié) $\frac{1}{35}x = 1$.
(Rozmnożywszy przez 35) . . . . $1x = 35$.

Rozwiązanié. $x = 35$. Liczba dni szukaná.
$\frac{3}{7}x = 15$. Liczba tylu razy, iléby z piérwszégo kanáłu woda w 35 dniach kádź napełniła.
$\frac{2}{5}x = 14$. Liczba tylu razy, iléby drugim kanálém woda w 35 dniach kádź wypróżniła.

Spráwdzénié. $\frac{3}{7}x - \frac{2}{5}x = 15 - 14 = 1$.

Inszé przykłady. Piérwszy kanál może kadź napełnić 7 razy w 8 dniach, drugi może ią wypróżnić 5 razy w 6 dniach. Iléż dni trzeba będzie do napełniénia kadzi, gdy woda obudwóma razém płynie kanálami?

Pewny kupiec zyskuie co rok $\frac{1}{10}$ maiątku swégo, który miáł handel zaczynaiąc, i wydaie co rok $\frac{1}{15}$ tegoż maiątku. Za iléż lát mieć będzie 2 razy tylé, ilé miáł na początku handlu?

72. *Zadanié 7. Pewny rzemieślnik może zrobić robotę jednę w 12 dniach, a drugi może to samo zrobić w 6 dniach. Biorą razém między siebie tę robotę: za iléż dni mogą ią skończyć?*

Arytmetycznie. Piérwszy zrobi za dzién $\frac{1}{12}$ téy roboty, a drugi zrobi $\frac{1}{6}$: więc razém zrobią przez dzién $\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$, albo $\frac{1}{12}+\frac{2}{12}$, czyli $\frac{3}{12}$, toiest $\frac{1}{4}$ całéy roboty: a zatém za cztéry dni całą robotę skończą.

Algiebr: Mian: Liczba dni szukaná . . . . x.
Część zrobioná przez rzémieślnika piérwszégo . . . . $\frac{1}{12}x$.
Część zrobioná przez drugiégo . . . $\frac{1}{6}x$.

Warunek. $\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}x=1$.

Przeráb: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika) $\frac{1}{12}x+\frac{2}{12}x=1$.
(Wykonáwszy oznaczoné dodáwanié) . . . $\frac{3}{12}x=1$.
(Przywiódłszy do náyprościeyszych wyrazów) $\frac{1}{4}x=1$.
(Rozmnożywszy przez 4) . . . . . . $1x=4$.

Rozwiązanié. $x=4$. Liczba dni szukaná.
$\frac{1}{12}x=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. Część zrobioná przez 1wszégo.
$\frac{1}{6}x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Część zrobioná przez 2giégo.

Spráwdzenié. $\frac{1}{12}x+\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$. Cała robota.

Inszé przykłady. Dwie robotników gromady kopią rów iedén: iedna gromada mogłaby skończyć tę robotę za dni 8, a drugá mnieysza daleko za dni 56. Za iléż dni wykopią obiedwie razém tén rów?

Woda wchodzi do kadzi przez dwa kanáły: iedén może ią napełnić w 12 godzinach, a drugi w 24 godzinach. Za iléż godzin obadwa razém kadź napełnią?

73. *Zadanié 8. Maiątek osoby A, iest $\frac{2}{3}$ maiątku Osóby B: A, i B, zyskuią po Zł. 12, a po tym zysku maiątek A, będzie $\frac{3}{4}$ maiątku B.*

Arytmetycznie. Aby maiątek A, był iednostaynie $\frac{2}{3}$ maiątku B, trzebaby aby i zysk A, był $\frac{2}{3}$ zysku B, toiest 8 Zł. Ale że A, zyskuie nie 8, ale 12 Zł. więc nad $\frac{2}{3}$ zysku B, zyskuie ieszcze A, 4 Zł: té więc 4 Zł: to czynią, że A, po zysku nie má $\frac{2}{3}$, alé $\frac{3}{4}$ maiątku B, także po zysku: więc té 4 złoté są w samėy rzeczy rożnicą między $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ maiątku B, toiest, są $\frac{1}{12}$ maiątku B. B, tedy mieć będzie po zysku 12 razy 4 Zł. toiest 48 Zł.

1wſzy Maiątek B . . . 36 Zł. Maiątek B, po zyſku . . . 48. Zł.
1wſzy Maiątek A . . . 24 Maiątek A, po zyſku . . . 36.

Algiebr: 1wſzy Maiątek B . . . x. Powtórny . . . $x + 12$.
1wſzy Maiątek A . . . $\frac{2}{3}x$. Powtórny . . $\frac{2}{3}x + 12$,
albo . . . . $\frac{3}{4}x + 9$.

Warunek. $\frac{3}{4}x + 9 = \frac{2}{3}x + 12$.

Przeráb: (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$\frac{9}{12}x + 9 = \frac{8}{12}x + 12$.
(Odiąwſzy $\frac{8}{12}x$) . . . . $\frac{1}{12}x + 9 = 12$,
(Odiąwſzy 9) . . . . $\frac{1}{12}x = 3$.
(Rozmnożywſzy przez 12) . . . . . $1x = 36$.

Rozwiązanié. $x = 36$. 1wſzy maiątek B.
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Maiątek A, ieſt $\frac{2}{3}$ *maiątku B: A, zyſkuie na B, Zł. 12, któré ſtraciwſzy B, má tylko* $\frac{2}{3}$ *maiątku A.*

Maiątek A, ieſt $\frac{3}{4}$ *maiątku B. A, zyſkuie Zł. 8. B, zaś traci Zł. 12, i potém tylé má A, ilé i B.*

A, má Zł. 24. B, Zł. 18. Iléż má zyſkać tak A, iak i B, aby po równym ich zyſku, maiątek A, przechodził tylko $\frac{1}{6}$ *ſtą maiątek B.*

A, i B, założyli ſię o Zł. 12, któré ieżeli A, wygrá; tedy u B, zoſtanie $\frac{2}{3}$ *maiątku A: ieżeli zaś B, wygrá, tedy u B, zoſtanie* $\frac{3}{4}$ *maiątku A.*

Spoſób poſtępowania w rozwięzywaniu tych wſzyſtkich zagádnień wcale ieſt podobny temu, który wyłożyliśmy w Rozdziele poprzedzaiącym. (§. 6 i naſtęp.)

74. *Zadanié 9. A, i B, maią razém . . . . . . 24 Zł.*
C, i D, maią razém . . . . . . 24 Zł.

Maiątek C, ieſt $\frac{2}{3}$ *maiątku A.*
Maiątek B, ieſt $\frac{3}{4}$ *maiątku D.*

Fig. 18. *Przez rozumowanié.* Niech liniie równé AB, CD, wyſtawuią nám 24 Zł. Liniie AX, BX, niech wyſtawuią maiątki A, i B, a liniie CY, DY, niech wyſtawuią maiątki C, i D.

Ponieważ

Ponieważ maiątek C, powinién bydź $\frac{2}{3}$ maiątku A; więc liniiá CY, powinna téż bydź $\frac{2}{3}$ linii AX: toieſt liniiá AX, powinna zawiérać w ſobie półtora razy liniią CY: weźmy liniią EB, równą połowie linii CD: będzie EX, zawiérała w ſobie półtora razy liniią DY. A że BX, má tylko mieć w ſobie $\frac{3}{4}$ linii DY; więc tylé nie doſtaie ieſzcze linii BX, aby była $\frac{3}{2}$ linii DY, ilá ieſt różnica $\frac{3}{4}$ od $\frac{3}{2}$ toieſt nie doſtaie iéy $\frac{3}{4}$ linii DY. Że zaś dodáwſzy BE, do BX, ieſt EX $= \frac{3}{2}$ DY; więc BE równá ſię $\frac{3}{4}$ DY. A ponieważ BE, wyſtáwiá nám Zł. 12; więc i $\frac{3}{4}$ DY, oznaczać będą Zł. 12. $\frac{1}{4}$ DY oznaczy Zł. 4, a całá liniiá DY oznaczy Zł. 16.

Maiątek D . . . . . 16 Zł.
. . . C . . . . . 8.
. . . B . . . . . 12.
. . . A . . . . . 12.

Algiebr: Mian: Maiątek C . . . . x.
. . . . . A . . . . . . $\frac{3}{2}x$.
. . . . . B . . . $24 - \frac{3}{2}x$.
. . . . . D . . . $24 - x$.
Drugié wyrażénié maiątku B . . . $18 - \frac{3}{4}x$.

Warunek. $24 - \frac{3}{2}x = 18 - \frac{3}{4}x$.

Przerábianié. (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika)
$24 - \frac{6}{4}x = 18 - \frac{3}{4}x$.
(Dodáwſzy $\frac{6}{4}x$) . . . . . $24 = 18 + \frac{3}{4}x$.
(Odiąwſzy 18) . . . . $6 = \frac{3}{4}x$.
(Podzieliwſzy przez 3) . . . $2 = \frac{1}{4}x$.
(Rozmnożywſzy przez 4) . . $8 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 8$. Maiątek C.
$\frac{3}{2}x = 12$. Maiątek A.
$24 - \frac{3}{2}x = 12$. Maiątek B.
$24 - x = 16$. Maiątek D.

Spráwdzénié. Maiątek B, ieſt w ſamé rzeczy $\frac{3}{4}$ maiątku D.

Inſzé przykłady. A, i B, maią razém . . . . 70. *Zł.*
C, i D, maią razém . . . . 70.

Maiątek C, ieſt $\frac{2}{5}$ maiątku A.
Maiątek B, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku D.

A, i B, maią razém . . . . . 144. Zł.
C, i D, maią razém . . . . . 144. Zł.

Maiątek C, ieſt $\frac{3}{4}$ maiątku A.
Maiątek B, ieſt $\frac{5}{6}$ maiątku D.

75. *Zadanié* 10. *Pewná oſoba dała $\frac{1}{3}$ maiątku ſwégo na pięć procentu, albo na 5%, a pozoſtałé $\frac{2}{3}$ tegoż maiątku, dała na 6%. Bierze zaś całégo procéntu 17000 Zł. Jakiż ieſt iéy maiątek?*

Arytmetycznie. Gdyby ta oſoba miała 300 Zł. dałaby była 100 Zł. na 5%, a 200 Zł. na 6%: procént z piérwſzéy części byłby 5 Zł. a z drugiéy 12 Zł: a ze wſzyſtkiém 17 Zł. Że zaś odbiérá w procéncie 17000 Zł. toieſt 1000 razy więcéy, więc i kapitáł iéy był 1000 razy większy od 300 Zł. a zatém był 300000 Zł.

Algiebr: Mian: Maiątek téy oſoby . . . . x.
Część daná na 5% . . . . $\frac{1}{3}x$.
Część daná na 6% . . . . $\frac{2}{3}x$.
Procént od 1wſzéy części . . . . . $\frac{5}{300}x$.
. . . . od 2giéy . . . . $\frac{12}{300}x$.

Warunek. $\frac{5}{300}x + \frac{12}{300}x = 17000$.

Przeráb: (Wykonáwſzy oznaczoné dodáwanié) $\frac{17}{300}x = 17000$.
(Podzieliwſzy przez 17) . . . . $\frac{1}{300}x = 1000$.
(Rozmnożywſzy przez 300) . . . . . . $1x = 300000$.

Rozwiązanié. $x = 300000$. Maiątek téy oſoby.
$\frac{1}{3}x = 100000$. Część tego maiątku na 5%.
$\frac{2}{3}x = 200000$. Część tego maiątku na 6%.
$\frac{5}{300}x = 5000$. Procént z piérwſzéy części.
$\frac{12}{300}x = 12000$. Procént z drugiéy części.
$\frac{17}{300}x = 17000$. Cały procént.

Uwága. Możná toż Zadanié rozwiązać i bez ułómków w tén ſpoſób:

Ozna-

Oznaczmy maiątek téy osoby przez liczbę, która tak przez 3, iak i przez 100 może bydź podzieloną *np:* przez *300x.*

Będzie część piérwszá daná na 5% . . . . *100x.*
Procént od niéy . . . . *5x.*
Część drugá daná na 6% . . . . *200x.*
Procént od niéy . . . . *12x.*

Warunek. $5x + 12x = 17000.$

Przerábianié. $17x = 17000.$
$1x = 1000.$
$300x = 300000.$ Maiątek téy osoby, tén sám co wyżéy.

Inszé przykłady. Pewná osoba dwoiaki handel prowadzi: w jedén włożyła $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, w drugi $\frac{3}{5}$ tegoż maiątku. Z piérwszégo handlu zyskuie 10%, a z drugiégo zyskuie 12%. Ze wszystkiém zyskuie za rok 44800 złotych.

Pewná osoba wchodzi w troiaki handel: w jedén wkładá $\frac{1}{4}$ swégo maiątku, w drugi $\frac{1}{3}$, a w trzeci resztę tegoż maiątku. Z piérwszégo handlu zyskuie w rok 8%, z drugiégo 12%, a z trzeciégo 15%: ze wszystkiém zaś zyskuie 58800 Zł.

76. *Zadanié 11. Pewná osoba dała $\frac{2}{3}$ swégo maiątku na 6%, a $\frac{1}{3}$ na 8%. Z piérwszéy części toiest ze $\frac{2}{3}$ swégo maiątku, więcéy 4800 Zł. zyskuie niż z drugiéy toiest z $\frac{1}{3}$ maiątku. Jakiż iest iéy maiątek?*

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba miała tylko 300 Zł. tedy 200 dałaby na 6%, a 100 na 8%. Z piérwszéy więc części miałaby zysku rocznégo 12 Zł. a z drugiéy 8 Zł: a zatém na każdych 300 Zł. zysk z piérwszéy części byłby 4 Zł. większy od zysku z drugiéy części. A że z piérwszéy części więcéy 4800 Zł. zyskuie niż z drugiéy toiest 4 razy 1200; więc też i kapitał iéy będzie 300 razy 1200, toiest 360000 Zł.

Część maiątku daná na 6%	240000.
Część maiątku daná na 8%	120000.
Procént z piérwszéy części	14400.
Procént z drugiéy	9600.
Różnica procéntów	4800.

Algiebr: Mian: Maiątek téy osoby . . . . x.
Część iego daná na $6\frac{0}{0}$ . . . . . $\frac{2}{3}x$.
Część daná na $8\frac{0}{0}$ . . . . $\frac{1}{3}x$.
Procént z piérwszéy części . . $\frac{12}{300}x$
Procént z drugiéy części . . . $\frac{8}{300}x$.

Warunek. $\frac{12}{300}x - \frac{8}{300}x = 4800$.

Przeráb: (Wykonáwszy oznaczoné odeymowanié) $\frac{4}{300}x = 4800$.
(Podzieliwszy przez 4) . . . . $\frac{1}{300}x = 1200$.
(Rozmnożywszy przez 300) . . . . $1x = 360000$.
Részta iak wyżéy.

Uwága. Możná i to Zadanié rozwiązać Algiebraicznie, nie używaiąc ułómków, ale oznáczaiąc maiątek téy osoby przez liczbę, która tak przez 3, iak i przez 100 może bydź podzieloną, toiest przez $300x$.

Insze przykłady. Pewná osoba wchodzi we dwa handle: w jedén kładzie $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, a w drugi $\frac{3}{5}$. W piérwszym handlu zyskuie $\frac{1}{4}$ swoiéy wkłádki, w drugim zyskuie $\frac{1}{5}$ swoiéy także wkłádki. Zyskuie zaś więcéy 1200 Zł. w drugim handlu niż w piérwszym.

Inná osoba má trzy handle: w jedén włożyła $\frac{2}{5}$ swégo maiątku, w drugi $\frac{1}{3}$ tegoż maiątku, a w trzeci resztę. W piérwszym handlu zyskuie $20\frac{0}{0}$, w drugim $15\frac{0}{0}$, a w trzecim $8\frac{0}{0}$. Zyskuie zaś więcéy 1300 Zł. w piérwszym handlu, niż w drugim i trzecim razém.

77. *Zadanié 12. Pewná osoba wkłádá we dwa handle 10000 Zł. W jednym zyskuie $10\frac{0}{0}$, a w drugim $12\frac{0}{0}$. Zysk iéy w roku urost do 1080 Zł. Iléż włożyła w jedén, a ilé w drugi handel?*

Arytmetycznie. Gdyby tén maiątek cały był włożony w piérwszy handel, zysk z niégo roczny byłby $\frac{1}{10}$ tegoż maiątku, toiest 1000 Zł. A że zysk większy iest 80 Zł. od 1000 Zł: więc część tego maiątku włożyła ta osoba i w drugi handel. Na każdych 100 Zł. włożonych w drugi handel zyskała ona 2 Zł. więcéy, niż na każdych 100 Zł. włożonych w piérwszy handel: a zatém liczbę tych 100 Zł. znaydziémy, dzieląc 80 przez 2. wypadnie na wieloráz 40. Więc 40 set, toiest 4000 Zł. włożyła ta osoba w drugi handel, a zatém 6000 Zł. włożyła w piérwszy.

Algiebr:

Algiebraicznie. Część włożoná w handel, gdzie ieſt zyſk 12$\frac{0}{0}$ . . x.
Drugá część włożoná w handel inny, gdzie
ieſt zyſk 10$\frac{0}{0}$ . . . . $10000 - x$.
Zyſk z piérwſzéy części . . . . $\frac{12}{100}x$.
Zyſk z drugiéy . . . . $1000 - \frac{10}{100}x$.

Warunek. $\frac{12}{100}x + 1000 - \frac{10}{100}x = 1080$.

Przeráb: (Odiąwſzy 1000 po obu ſtronach) $\frac{12}{100}x - \frac{10}{100}x = 80$.
(Wykonáwſzy oznaczoné odeymowanié) . . $\frac{2}{100}x = 80$.
(Podzieliwſzy przez 2) . . . . $\frac{1}{100}x = 40$.
(Rozmnożywſzy przez 100) . . . . $1x = 4000$.

Rozwiązanié. $x = 4000$. Część maiątku, z któréy procént 12$\frac{0}{0}$.
$10000 - x = 6000$. Część, z któréy procént 10$\frac{0}{0}$.
$\frac{12}{100}x = 480$. Zyſk z piérwſzéy części.
$1000 - \frac{10}{100}x = 600$. Zyſk z drugiéy części.

Sprawdzénié. $480 + 600 = 1080$.

Uwága. Oznáczaiąc przez $100x$ część maiątku przynoſzącą 12$\frac{0}{0}$ można było uchronić ſię ułómków.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba dała część iednę maiątku ſwégo na 7$\frac{0}{0}$, a drugą część na 5$\frac{0}{0}$. Cały zaś maiątek téy Oſoby ieſt 80000 Zł. a cały procént wynoſi na 4500.

Pewná oſoba dzieli maiątek ſwóy między dwa handle. Z iednégo zyſkuie $\frac{1}{5}$ wkładki ſwoiéy, z drugiégo zyſkuie $\frac{1}{6}$ drugiéy wkładki. Cały iéy maiątek ieſt 45000 Zł. a cały zyſk 8400 Zł.

78. *Zadanié 13. Pewná oſoba 15000 Zł. włożyła we dwa handle. W jednym zyſkuie 9$\frac{0}{0}$, a w drugim 11$\frac{0}{0}$. W roku zaś zyſkała 250 Zł. więcéy w drugim handlu niż w piérwſzym.*

Arytmetycznie. Gdyby ta oſoba cały ſwóy maiątek była włożyła w drugi handel, byłaby z niégo zyſkała za rok Zł. 1650, więcéy niż z piérwſzégo, w który niby téż była nie włożyła. A że tylko zyſkuie więcéy 250 Zł. z drugiégo handlu, niż z piérwſzégo; więc w tém drugiém mniémaniu zyſkuie mniéy 1400 Zł. niż w piérwſzém.

 Na

Na każdém 100 Zł. włożonym raczéy w piérwſzy niż w drugi handel, zyſk téy oſoby w piérwſzym handlu powiękſzá ſię 9 Zł. a w drugim handlu zmnieyſzá ſię 11 Zł. co czyni różnicę w 20 Zł: na każdém ſtu złotych. Znaydziémy więc liczbę tych ſet włożonych w piérwſzy handel, dzieląc całą różnicę 1400 Zł. przez 20. A że na wieloráz wypádá 70; więc 70 ſet, toieſt 7000 Zł. włożyła ta oſoba w piérwſzy handel, a zatém włożyła 8000 Zł. w handel drugi.

Część maiątku w piérwſzym handlu . . .	7000 Zł.
. . . . . . w drugim	8000.
Zyſk w drugim handlu	880.
. . . w piérwſzym	630.
Różnica	250.

Algiebr: Mian: Część w piérwſzy handel włożoná . . . . . x.
. . . w drugi . . . . $15000 - x$.
Zyſk w piérwſzym . . . . $\frac{9}{100}x$.
. . . w drugim . . . . $1650 - \frac{11}{100}x$.

Różnica zyſków . . . . $1650 - \frac{20}{100}x$.

Warunek. $1650 - \frac{20}{100}x = 250$.

Przeráb: (Dodáwſzy $\frac{20}{100}x$) . . . . $1650 = 250 + \frac{20}{100}x$.
(Odiąwſzy 250) . . . . . $1400 = \frac{20}{100}x$.
(Podzieliwſzy przez 20) . . $70 = \frac{1}{100}x$.
Rozmnożywſzy przez 100) $7000 = 1x$.

Rozwiązanié. $x = 7000$. Część włożoná w piérwſzy handel.
Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba kupuie 120 łokci materyi we dwóch różnych gatunkach. Jednéy z tych materyi má 3 łokcie za dwa cz. Zł. a drugiéy má 4 łokcie za 3 Cz: Zł. Płaci zaś 12 Cz. Zł. za łokcie wſzyſtkié piérwſzéy materyi więcéy niż za wſzyſtkié łokcie drugiéy materyi.

Na obicié pokoiów bierze kto 144 łokcie dwoiakiégo gatunku płótna. Széрokość iednégo ieſt na 1 łokieć i $\frac{2}{3}$, a ſzérokość drugiégo na 1 łokieć, i $\frac{3}{4}$. Drugiégo gatunku łokci więcéy ieſt 47 kwadratowych niż piérwſzégo.

79. *Zadanié 14. Pewná osoba dzieli swóy maiątek między dwa handle: w jednym zyskuie 12%, a w drugim 9%. Włożyła zaś 5000 Zł. więcéy w piérwszy handel niż w drugi, a w zysku całym odbiérá za rok 2280 Zł. Trzeba znaleźć część iéy maiątku włożonégo w piérwszy i w drugi handel.*

Arytmetycznie. Gdyby ta osoba nie miała tylko té 5000 Zł. którémi więcéy włożyła w piérwszy handel niż w drugi; tedy w rok byłaby zyskała 50 razy 12 Zł. toiest 600 Zł: a że zyskała 2280 Zł. więc zyskała więcéy 1680 Zł. niżby była zyskała, nie maiąc tylko 5000 Zł. Oprócz tych 5000 Zł. ilé set ta osoba kładzie w piérwszy handel, tylé ich téż kładzie i w drugi handel, a za obadwa razém sta Zł. iedno w piérwszy, a drugié włożoné w drugi handel zyskuie razém 21 Zł. Więc tę liczbę set Zł. włożonych w drugi handel znaydziémy, dziełąc 1680 przez 21. Że zaś na wieloráz wypádá 80; więc ta osoba włożyła w drugi handel 80 set Zł. toiest 8000 Zł a w piérwszy handel włożyła 5000 więcéy, toiest 13000 Zł.

Część maiątku włożoná w 1wszy handel	13000 Zł.
Drugá część włożoná w 2gi handel	8000.
Zysk z piérwszégo handlu	1560.
Zysk z drugiégo handlu	720.
Summa zysków	2280.

Algiebr: Mian: Część włożoná w 2gi handel . . . . x.
Część włożoná w 1wszy handel . . $x + 5000$.
Zysk z drugiégo handlu . . . . $\frac{9}{100}x$.
Zysk z piérwszégo handlu . . . $\frac{12}{100}x + 600$.

Warunek. $\frac{9}{100}x + \frac{12}{100}x + 600 = 2280$.

Przerábianié. (Odiąwszy 600) . . $\frac{9}{100}x + \frac{12}{100}x = 1680$.
(Dodáwszy ułómki) . . . . . $\frac{21}{100}x = 1680$.
(Podzieliwszy przez 21) . . . $\frac{1}{100}x = 80$.
(Rozmnożywszy przez 100) . . . $1x = 8000$.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Pewná osoba daié iednę summę na 8%, a drugą większą 4000 Zł. od piérwszéy na 6%. Procéntu razém z obudwóch summ má 1920 Zł.

 Pewná

Pewná osoba stawiá mur, którégo wysokość wszędzie iest iednakowá, a grubość iednéy części, na łokieć $1\frac{1}{3}$, a drugiéy na łokieć 1 i $\frac{3}{4}$. Więcéy zaś iest na 24 łokcie wdłuż tego drugiégo muru, niż piérwszégo: a biorąc tylko wysokość na 1 łokieć; bryłowatość tego całégo muru iest 227 łokci kubicznych. Jakáż będzie długość muru, piérwszéy i drugiéy szérokości?

80. *Zadanié 15. Kupiec pewny z kapitáłu włożonégo w jedén handel zyskuie $13\frac{0}{0}$, a z jnnégo kapitału w drugi handel włożonégo zyskuie $9\frac{0}{0}$. Więcéy zaś 8000 Zł. włożył w piérwszy handel niż w drugi, a zysk iego roczny z piérwszégo handlu większy iest 1440 Zł. niż zysk roczny z drugiégo handlu.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec miáł tylko 8000 Zł. i té włożył w piérwszy handel; tedyby w nim zyskáł więcéy 1040 Zł. niż w drugim, w któryby nic nie włożył. A że różnica zysków, w tych dwóch handlach iest większá 400 Zł. od różnicy mniemanéy; więc tén kupiec wchodzi i w drugi handel.

Oprócz 8000 Zł. włożonych w handel pierwszy, na każdém stu złotych włożonych tak w handel piérwszy iak i drugi zyskuie tén kupiec więcéy 4 Zł. z piérwszégo handlu, niż z drugiégo, a cała zysków różnica wynosząca na 400 Zł. pochodzi z téy różnicy 4 Zł. tylé razy powtórzonéy, ilé iest set złotych włożonych w handel drugi. Znaydziemy więc tę liczbę set, dzieląc 400 przez 4: wypadnie na wieloráz 100: a zatém sto razy 100 Zł. włożył tén kupiec w drugi handel, toiest włożył weń Zł. 10000.

Kapitáł włożony w piérwszy handel . .	18000 Zł.
Kapitáł włożony w drugi handel	10000.
Zysk z piérwszégo handlu	2340 Zł.
Zysk z drugiégo handlu	900.
Różnica zysków . .	1440.

Algiebr: Mian: Część maiątku w 2gim handlu . . . x.

. . . . w 1wszym . . . . . $x + 8000$.

Zysk na drugim handlu . . . . . . $\frac{9}{100} x$.

. . . na piérwszym . . . . $\frac{13}{100} x + 1040$.

Różnica tych zysków . . . $\frac{4}{100} x + 1040$.

Warunek. $\frac{4}{100} x + 1040 = 1440$.

Przeráb: (Odiąwſzy 1040) . . . . $\frac{4}{100} x = 400.$
(Podzieliwſzy przez 4) . . $\frac{1}{100} x = 100.$
(Rozmnożywſzy przez 100) $1x = 10000.$
Reſzta iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba dała iednę ſummę na 8°/o, a drugą większą 12000 złotémi od piérwſzéy na 6°/o. Zyſkuie zaś w procéncie więcéy 150 Zł. z piérwſzéy ſummy niż z drugiéy.

Káże kto kopać rów w pewnéy długości na łokcie rachowanéy, i płaci 100 Zł. za 12 łokci roboty. Káże znowu kopać inny rów ſzérſzy lub głębſzy od piérwſzégo, i płaci 100 Zł. za 8 łokci roboty, a tén drugi rów má 40 łokci wdłuż więcéy niż piérwſzy: zapłacił za całą robotę około drugiégo rowu więcéy 1000 Zł. niż za całą robotę około piérwſzégo rowu.

81. *Zadanié 16. Przyymuie kto ſługę, i obiecuie mu na rok, albo na 12 mieſięcy Cz: Zł: 36, i ſuknie. Po ſkończonych 7 mieſiącach ſługa ſię odprawuie, i odbiérá w zapłacie Cz: Zł. 16, i nad to ieſzcze ſuknie. Tylé mu ſię téż w ſaméy rzeczy należało. Trzeba teráz dóyśdź iak wyſoko mu były ſuknie oſzacowané.*

Arytmetycznie. Za 7 mieſięcy ſłużby należało ſię temu ſłudze $\frac{7}{12}$ rocznych zaſług ugodzonych, toieſt 21 Cz: Zł. i $\frac{7}{12}$ taxy ſukién. Więc ſuknie oſzacowané ſą w 5 Cz: Zł: i nad to w $\frac{7}{12}$ całéy ich taxy: a zatém $\frac{5}{12}$ całéy téy taxy czynią 5 Cz: Zł: a $\frac{1}{12}$ téy taxy uczyni 1 Cz: Zł. Suknie więc na rok dané, oſzacowané ſą w 12 Cz: Zł.

Algiebr: Mian: Taxa ſukién . . . . $x.$
Zaſługi roczné . . $36 + x.$
Zaſługi 7 mieſięcy . $21 + \frac{7}{12} x.$

Warunek. $16 + x = 21 + \frac{7}{12} x.$

Przerábianié. (Odiąwſzy 16) . . . . . . $x = 5 + \frac{7}{12} x.$
(Odiąwſzy $\frac{7}{12} x$) . . . $\frac{5}{12} x = 5.$
(Podzieliwſzy przez 5) $\frac{1}{12} x = 1.$
(Rozmnożywſzy przez 12) $1x = 12.$

Rozwiązanié. $x = 12.$ Taxa Sukiéń.
$36 + x = 48.$ Zaſługi roczné.
$21 + \frac{7}{12} x = 28.$ Zaſługi 7 mieſięcy.
$16 + x = 28.$ Tylé tén ſługa odebrał w zaſługach za 7 mieſięcy.

Uwága. Maiąc wzgląd ſprawiedliwy na to, iż ſuknie były przez 7 mieſięcy zażywané i przyſzarzané, i otaxowawſzy ié tylko w $\frac{5}{12}$ początkowégo ſzacunku; niechby tén ſługa odebrał, w zaſługach za 7 mieſięcy 23 Cz: Zł: i ſuknie. Ponieważ mu ſię należało 21 Cz: Zł: w piéniędzach, a $\frac{7}{12}$ ſukién; więc gdy mu ſię daie 23 Cz: Zł: otaxowano $\frac{2}{12}$, albo $\frac{1}{6}$ ſukién w 2 Cz: Zł: a zatém całé ſuknie koſztowały z początku 12 Cz: Zł.

Inſzé przykłady. Należytość ſługi roczná, ieſt 30 Cz: Zł: i ſuknie. Po ośmiu miéſiącach odbiérá w zaſługach 17 Cz: Zł: i ſuknie otaxowané bez względu na to, że były zażywané.

Należytość ſługi roczná ieſt 32 Cz: Zł: i ſuknie. Po 9 mieſiącach odbiérá w zaſługach 27 Cz: Zł. i ſuknie otaxowané z względém na ich przytarcié.

82. *Zadanié 17. Pewny kupiec powiękſzá co rok czwártą częścią ſwóy maiątek, wyłączywſzy z niego 800 Cz: Zł: na roczny wydátek. Na końcu dwóch lát tén maiątek iego powiękſzył ſię 9000 Cz: Zł. Jakiż był maiątek iego piérwiáſtkowy?*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic nie wydáwał; tedy na końcu piérwſzégo roku powiękſzyłby $\frac{1}{4}$ częścią maiątek ſwóy piérwiáſtkowy, toieſt miálby $\frac{5}{4}$ tegoż maiątku. Na końcu drugiégo roku maiątek iego byłby znowu powiękſzony $\frac{1}{4}$ częścią tychże $\frac{5}{4}$, toieſt byłby powiękſzony $\frac{5}{16}$ piérwiáſtkowégo maiątku: a zatém na końcu drugiégo roku powiękſzénié maiątku tego kupca byłoby ſummą $\frac{1}{4}$ i $\frac{5}{16}$, toieſt $\frac{9}{16}$ tegoż piérwiáſtkowégo maiątku.

Na tych 800 Cz: Zł. które w początku roku piérwſzégo wyłączył kupiec na wydátki, byłby przez dwa lata zarobił $\frac{9}{16}$ tychże 800 Cz: Zł: toieſt byłby zarobił 450 Cz: Zł: i miálby 1250 Cz: Zł: a na tych 800 Cz: Zł: które wyłączył w początku drugiégo roku także na wydátki, byłby zarobił $\frac{1}{4}$ tychże 800 Cz: Zł: toieſt 200 Cz: Zł: i miálby 1000 Cz: Zł. Więc z przyczyny tego wyłączania kapitál iego zmnieyſzy ſię 2250 Cz: Zł: na końcu lát dwóch.

Gdyby

Gdy tedy od $\frac{9}{16}$ piérwiáſtkowégo maiątku tego kupca odeymiémy 2250 Cz: Zł: zoſtanie ſię ieſzcze 9000 Cz: Zł: podług warunku: a zatém przed tém zmnieyſzéniém $\frac{9}{16}$ piérwiáſtkowégo iego maiątku czyniły więcéy 2250 Cz: złotémi; toieſt czyniły 11250 Cz: Zł. Więc $\frac{1}{16}$ tegoż maiątku czyni $\frac{1}{9}$ część Cz: Zł: 11250, toieſt Cz: Zł: 1250: a zatém cały piérwiáſtkowy maiątek był 16 razy tak wielki, toieſt wynoſił na 20000 Cz: Zł:

Algiebraicznie. Maiątek piérwiáſtkowy kupca . . x.
Maiątek po wyłączonych piérwſzy ráz 800 Cz: Zł. . . . . $x - 800$.
Zyſk piérwſzégo roku . . . . $\frac{1}{4}x - 200$.
Maiątek na końcu 1wſzégo roku . $\frac{5}{4}x - 1000$.
Maiątek po wyłączonych drugi ráz 800 czerwonych złotych. . . $\frac{5}{4}x - 1800$.
Zyſk drugiégo roku . . . . . $\frac{5}{16}x - 450$.
Maiątek na końcu drugiégo roku . $\frac{25}{16}x - 2250$.
Powiękſzénié maiątku przez 2 lata $\frac{9}{16}x - 2250$.

Warunek. $\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$.

Przeráb: (Dodáwſzy 2250) . . . . $\frac{9}{16}x = 11250$.
(Podzieliwſzy przez 9) . . $\frac{1}{16}x = 1250$.
(Rozmnożywſzy przez 16) $1x = 20000$.

Rozwiązanié. $x = 20000$. Maiątek piérwiáſtkowy.
$x - 800 = 19200$. Maiątek po odiętych 1wſzy ráz 800 Cz. Zł.
$\frac{1}{4}x - 200 = 4800$. Zyſk piérwſzégo roku.
$\frac{5}{4}x - 1000 = 24000$. Maiątek na końcu 1go roku.
$\frac{5}{4}x - 1800 = 23200$. Maiątek po odiętych 2gi ráz 800 Cz. Zł.
$\frac{5}{16}x - 450 = 5800$. Zyſk drugiégo roku.
$\frac{25}{16}x - 2250 = 29000$. Maiątek na końcu 2go roku.
$\frac{9}{16}x - 2250 = 9000$. Powiękſzénié maiątku przez dwa lata, takié, iakié bydź powinno.

Inſzé przykłady. Pewny kupiec powiękſzá $\frac{1}{5}$ częścią przez rok ſwóy maiątek, wyłączywſzy 1250 Zł. na wydátki roczné. Na końcu 3 lát powiękſzył 3640 złotémi piérwiáſtkowy ſwóy maiątek.

Pewny

Pewny kupiec powiękſzá $\frac{2}{7}$ przez rok ſwóy maiątek, wyłączywſzy 2401 Zł. na początku każdégo roku. Po 4 latach ſkończonych maiątek iego powiękſzony zoſtáł 43680 Zł. Iléż miáł przéd 4 laty?

83. *Zadanié 18. Pewny kupiec má 5120 Cz: Zł: i wkłádá ié w handel, na którym powiękſzá corocznie ſwóy maiątek $\frac{1}{4}$ onégo częścią, wyłączywſzy na początku każdégo roku ſummę iednakową ſłużyć maiącą na wydátki. Po ſkończonych 4 latach maiątek iego powiękſzył ſię 1845 cz: złotémi. Iléż wyłączá na roczny wydátek.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic nie wydáwał, tedy ponieważ w handel wkłádá, naprzód: . . . . 5120 Cz. Zł.

Zyſk iego w piérwſzym roku byłby	1280.
Maiątek na końcu piérwſzégo roku	6400.
Zyſk drugiégo roku	1600.
Maiątek na końcu drugiégo roku	8000.
Zyſk trzeciégo roku	2000.
Maiątek na końcu trzeciégo roku	10000.
Zyſk czwártégo roku	2500.
Maiątek na końcu czwártégo roku	12500.
Powiękſzénié maiątku w 4 latach byłoby . .	7380.
Aze to powiękſzénié ieſt tylko	1845.
Więc mnieyſzé ieſt, niż gdyby nic nie wydáwał i różnica ta ieſt	5535.

To zmnieyſzénié pochodzi z wyłączania corocznégo pewnéy a iednakowéy ſummy na wydátki.

Summa którą wyłączył na początku czwártégo roku nie była w handlu tegoż roku. Gdyby zaś była, byłby ią na końcu tego czwártégo roku powiękſzył $\frac{1}{4}$ częścią: a zatém miałby $\frac{4}{4}$ i $\frac{1}{4}$ onéyże, toieſt $\frac{5}{4}$. Więc zmnieyſzénié na końcu tego roku pochodzące z wyłączénia ſummy na wydátki tegoż roku, ieſt $\frac{5}{4}$ téyże ſummy.

Podobnie i ſumma wyłączoná na początku 3ciégo roku, zamiéniłaby ſię na końcu tego 3ciégo roku wráz z zyſkiém na $\frac{5}{4}$ téyże ſummy, a na końcu czwártégo roku byłaby $\frac{5}{4}$ tychże $\frac{5}{4}$, toieſt $\frac{25}{16}$ téyże ſummy. Więc zmnieyſzénié pochodzące z wyłączénia ſummy na wydátki 3ciégo roku, ieſt $\frac{25}{16}$ téyże ſummy.

Tak

Tak téż i zmnieyſzénié pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki drugiégo roku ieſt $\frac{5}{4}$ z $\frac{25}{16}$, czyli $\frac{125}{64}$ téyże ſummy.

Nakoniec zmnieyſzénié pochodzącé z wyłączénia ſummy na wydátki piérwſzégo roku ieſt $\frac{5}{4}$ z $\frac{125}{64}$, czyli $\frac{625}{256}$ téyże ſummy.

Zmnieyſzénié tedy całé pochodzącé z tych 4 ſumm wyłączonych naſtępnie na wydátki 4 lát, równá ſię wydátkowi rocznému tylé razy wziętému, ilé wyráżá ſumma ułómków $\frac{5}{4}$, $\frac{25}{16}$, $\frac{125}{64}$, $\frac{625}{256}$, toieſt (przywiódſzy té ułómki do iednakowégo mianowniká) równa ſię ſummie $\frac{320}{256}$, $\frac{400}{256}$, $\frac{500}{256}$, $\frac{625}{256}$, któré to ułómki dodané czynią ſummę $\frac{1845}{256}$.

Więc $\frac{1845}{256}$ rocznégo wydátku wyrównywaią 5535 Cz: Zł. którémi mniéy miáł kupiec na końcu lát cztérech, niż gdyby był nic nie wyłączył na roczné wydátki: a zatém $\frac{1}{256}$ tego wydátku będzie znaczyć mniéy 1845 razy, niż 5535 Cz. Zł. toieſt będzie znaczyć 3 Cz: Zł: cały zaś roczny wydátek będzie 256 razy więkſzy, toieſt będzie 768 Cz: Zł.

1wſzy maiątek tego kupca	5120 Cz. Zł.
Wyłączywſzy w 1ſzym roku 768 Cz: Zł: .	4352.
Zyſk 1wſzégo roku	1088.
Maiątek na końcu piérwſzégo roku	5440.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	4672.
Zyſk 2go roku	1168.
Maiątek na końcu 2go roku	5840.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	5072.
Zyſk 3go roku	1268.
Maiątek na końcu 3go roku	6340.
Wyłączywſzy tyléż co wyżéy	5572.
Zyſk 4go roku	1393.
Maiątek na końcu 4go roku	6965.
Maiątek na początku 1wſzégo roku . . .	5120.
Różnica, czyli powiękſzénié tego maiątku . .	1845.

Algiebr: Mian:	Wydátek roczny	x.
	Maiątek zmnieyſzony przez x	$5120 - x$.
	Zyſk piérwſzégo roku	$1280 - \frac{1}{4}x$.
	Maiątek na końcu 1wſzégo roku	$6400 - \frac{5}{4}x$.
	Maiątek tén zmnieyſzony przez x . . .	$6400 - \frac{9}{4}x$.
	Zyſk 2giégo roku	$1600 - \frac{9}{16}x$.

Maiątek na końcu 2giégo roku . . . . $8000 - \frac{45}{16}x$.
Maiątek tén zmnieyſzony przez *x* . . . $8000 - \frac{61}{16}x$.
Zyſk 3ciégo roku . . . . $2000 - \frac{61}{64}x$.
Maiątek na końcu 3ciégo roku . . . . $10000 - \frac{305}{64}x$.
Maiątek tén zmnieyſzony przez *x* . . . $10000 - \frac{369}{64}x$.
Zyſk 4tégo roku . . . . $2500 - \frac{369}{256}x$.
Maiątek na końcu 4tégo roku . . . . $12500 - \frac{1845}{256}x$.
Powiękſzénié całé maiątku . . . . . $7380 - \frac{1845}{256}x$.

Warunek. $7380 - \frac{1845}{256}x = 1845$.

Przeráb: (Dodáwſzy $\frac{1845}{256}x$) . . . . . . $7380 = 1845 + \frac{1845}{256}x$.
(Odiąwſzy 1845) . . . . $5535 = \frac{1845}{256}x$.
(Podzieliwſzy przez 1845) . . . $3 = \frac{1}{256}x$.
(Rozmnożywſzy przez 256) . $768 = 1x$.
Reſzta iak wyżéy.

Uwága. Do rozwiązania podobnych Zadáń trzeba przyſpoſábiać Uczniów przez przykłády prościeyſzé, w któréby mnieyſzá liczba lát wchodziła.

Przykłady. Pewny kupiec má 30000 Zł. i powiękſzá ié co rok $\frac{1}{5}$ częścią, wyłączywſzy na początku każdégo roku pewną i iednakową ſummę na wydátki. Po ſkończonych 2 latach maiątek iego powiękſzył ſię 1650 Zł.

Zachowuie kto ſobie ſummę pewną na wydátki iednégo roku wyſtárczaiącą: daie zaś 16400 Zł. na procént 5% maiąc w myśli co rok iednakową ſummę wydáwać, i tę potém wyłączá na początku drugiégo i trzeciégo roku. Drugi ráz taką ſummę wyłączywſzy, nic mú ſię nie zoſtaie. Jakáż ieſt ta ſumma?

Inná oſoba wyłączywſzy na roczné wydátki pewną ſummę, daie 25220 Zł. na procént 5%. Wyłączá potém taką ſummę iako i piérwéy na początku każdégo roku, i po ſkończonych 4 latach, nic ſię iéy nie zoſtaie.

Inná znowu oſoba podobnie ſobie poſtępuiąc, daie 689620 Zł. na procént 5%, i po ſkończonych 5 latach nic ſię iéy nie zoſtaie.

84 *Zadanié 19. Pewny kupiec powiękſzá $\frac{1}{3}$ częścią corocznie ſwóy maiątek, wyłączaiąc 2700 Zł. na wydátki każdégo roku. Na końcu 3 lát mieć będzie dwa razy tylé, ilé miáł na początku.*

Arytmetycznie. Gdyby tén kupiec nic na wydátki nie wyłączáł; tedy na końcu piérwſzégo roku maiątek iego byłby powiękſzony trzecią częścią;

i z tém powiękſzéniém miáłby $\frac{4}{3}$ piérwſzégo maiątku. Na końcu drugiégo roku powiękſzyłby znowu $\frac{1}{3}$ częścią té $\frac{4}{3}$, i miáłby $\frac{4}{3}$ tych $\frac{4}{3}$, to ieſt miáłby $\frac{16}{9}$ piérwſzégo maiątku. Na końcu trzeciégo roku miáłby $\frac{4}{3}$ tych $\frac{16}{9}$, toieſt miáłby $\frac{64}{27}$ piérwſzégo maiątku. Ale że na końcu trzeciégo roku má tylko tylé dwoie piérwſzégo maiątku, toieſt $\frac{54}{27}$; więc má mniéy $\frac{10}{27}$. A to zmnieyſzénié ſtąd pochodzi, że co rok wyłączá pewną i iednakową ſummę na wydátki.

Té 2700 Zł. któré kupiec wyłączá na początku trzeciégo roku byłyby mu przyniosły za rok zyſk 900 Zł: więc przez ich wyłączénié kapitáł iego zmnieyſzá ſię 3600 Zł. na końcu tego trzeciégo roku.

Podobnie ſumma wyłączoná na początku drugiégo roku nie była w handlu przez 2 lata, a zmnieyſzénié ſtąd pochodzącé ieſt $\frac{16}{9}$ teyżé ſummy, toieſt 4800 Zł.

Summa znowu wyłączoná na początku piérwſzégo roku nie była w handlu przez 3 lata, a zmnieyſzénié ſtąd pochodzącé ieſt $\frac{64}{27}$ téyżé ſummy, toieſt 6400 Zł.

Więc zmnieyſzénié pochodzącé z tych trzech wyłączéń ieſt ſumma 3600, 4800, 6400, toieſt 14800 Zł.

Więc $\frac{10}{27}$ piérwſzégo maiątku czynią 14800 Zł. a zatém $\frac{1}{27}$ tego maiątku czyni . . . . 1480 Zł.

Cały zaś piérwſzy maiątek będzie 27 razy tak wielki, toieſt będzie . . . . 39960 Zł.

Wyłączywſzy 2700 Zł.	37260.
Zyſk piérwſzégo roku	12420.
Maiątek na końcu 1go roku	49680.
Wyłączywſzy 2700 Zł.	46980.
Zyſk 2go roku	15660.
Maiątek na końcu drugiégo roku . . .	62640.
Wyłączywſzy 2700 Zł.	59940.
Zyſk 3go roku	19980.
Maiątek na końcu 3go roku	79920.

Który to oſtatni maiątek ieſt 2 razy tak wielki, iak piérwſzy.

Algiebr: Mian: Piérwſzy maiątek . . . . x.
Po piérwſzém wyłączéniu . . . . $x - 2700$.
Zyſk 1go roku . . . . $\frac{1}{3}x - 900$.

 Maią-

Maiątek na końcu 1wszégo roku . . . . $\frac{4}{3}x - 3600$.
Po drugiém wyłączéniu . . . . $\frac{4}{3}x - 6300$.
Zysk 2go roku . . . . $\frac{4}{9}x - 2100$.
Maiątek na końcu 2go roku . . . . . . $\frac{16}{9}x - 8400$.
Po trzeciém wyłączéniu . . . . $\frac{16}{9}x - 1100$.
Zysk 3go roku . . . . $\frac{16}{27}x - 3700$.
Maiątek na końcu 3go roku . . . . . . $\frac{64}{27}x - 14800$.

Warunek. $\frac{64}{27}x - 14800 = 2x$.

Przerábianié. (Dodáwszy 14800) $\frac{64}{27}x = 2x + 14800$.

{ Obróciwszy $2x$ na ułomek z jednakowym piérwszému mianownikiém. } $\frac{64}{27}x = \frac{54}{27}x + 14800$.

(Odiąwszy $\frac{54}{27}x$) . . . . . $\frac{10}{27}x = 14800$.
(Podzieliwszy przez 10) . . $\frac{1}{27}x = 1480$.
(Rozmnożywszy przez 27) . . $x = 39960$.

Reszta iak wyżéy w Arytmetyczném postępowaniu.

Uwága. Oznaczywszy z początku zaráz maiątek piérwszy tego kupca przez liczbę, którą 27 zupełnie dzieli *np.* przez $27x$, uchronilibyśmy się byli wyrazów ułómkowych w mianowaniu. Tę uwágę przystósować należy, i do inszych podobnych Zadáń.

Insze przykłady. Pewny kupiec powiększá $\frac{1}{4}$ częścią corocznie swóy maiątek, wyłączywszy 28928 Zł. na początku każdégo roku. Po skończonych 4 latach podwoił swóy piérwszy maiątek.

Pewná osoba wyłączá 131000 co rok z maiątku swégo, zyskuie zaś z reszty na kocńu każdégo roku po 10$\frac{2}{5}$. Po skończonych trzech latach maiątek piérwszy powiększył się $\frac{1}{5}$ częścią.

85. *Zadanié 20. Pewny chłopek przedáł przez 3 targi, pewną liczbę korcy zboża. Na piérwszym targu przedáł połowę tego zboża, i nad to pół korca: na drugim targu przedáł połowę reszty zboża, i nad to znowu pół korca: na trzecim targu przedáł połowę téy ostatniéy reszty i nad to pół korca, i wszystko wyprzedáł. Iléż miáł do przedania korcy zboża?*

Arytmetycznie. Ponieważ tén chłopek na trzecim targu przedáwſzy połowę reſztuiącégo zboża, i nad to pół korca, wſzyſtko wyprzedał; więc té pół korca było drugą połową reſztuiącégo zboża: a zatém na trzecim targu miáł korzec 1 do przedania.

Tén korzec 1 i pół korca przedané na drugim targu, czyniły razém połowę tego zboża, któré miáł na drugim targu: więc na drugim targu miáł 3 korce do przedania.

Té trzy korce i pół korca przedané na piérwſzym targu, czyniły razém połowę zboża, którą miáł na piérwſzym targu: więc na piérwſzym targu miáł 7 korcy do przedania.

Piérwſzá liczba korcy do przedania . . . . 7. korcy.
Gdyby był przedáł połowę, zoſtałoby ſię . . . . $3\frac{1}{2}$.
Ale że nad to przedáł $\frac{1}{2}$ korca, więc zoſtało . . . . . 3.
Gdyby był na drugim targu przedáł połowę, zoſtałoby ſię $1\frac{1}{2}$.
Ale że nad to przedáł $\frac{1}{2}$ korca; więc ſię zoſtało . . . . 1.
Gdyby był na 3cim targu przedáł połowę, zoſtałoby ſię - $\frac{1}{2}$.
Ale że przedáł $\frac{1}{2}$ korca nad to; więc ſię zoſtało . . . 0.

Algiebr: Piérwſzá liczba korcy . . . . x.
Gdyby był przedáł połowę, zoſtałoby ſię . . . . $\frac{1}{2}x$.
Że przedáł nad to pół korca; więc ſię zoſtaie . . . $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.
Gdyby był na drugim targu przedáł połowę, zoſtałoby ſię $\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.
Że przedáł nad to pół korca; więc ſię zoſtaie . . . $\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$.
Gdyby był na 3cim targu przedáł połowę, zoſtałoby ſię $\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$.
Że przedáł nad to pół korca; więc ſię zoſtaie . . . $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8}$.

Warunek. $\frac{1}{8}x - \frac{7}{8} = 0$.

Przeráb: (Dodáwſzy $\frac{7}{8}$ po obu ſtronach) $\frac{1}{8}x = \frac{7}{8}$.
(Rozmnożywſzy przez 8) . . . $1x = 7$.
Reſzta rozwiązania iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Liczba targów ieſt 4, 5, 6, 7, *i t. d.*
Liczba korcy po oſtatnim targu pozoſtałych . . . . 1, 3, 7, 15, *i t. d.*

Niechby znowu na każdym targu nad $\frac{2}{3}$ liczby korcy przedano $\frac{2}{3}$ korca, niechby zaś liczba targów była . . . . 3, 4, 5, 6, 7, *i t. d.*
a liczba korcy po oſtatnim targu pozoſtałych . . . 0, 2, 8, 26, 80. *i t. d.*

Nakoniec niechby nad ¾ liczby korcy przedano nad to na każdym targu ¾ korca, a niech liczba korcy pozostałych, po ostatnim targu będzie iedna z tych . . . 0, 3, 15, 63, i t. d.

86. *Zadanie 21. Pewny oyciec dzieli maiątek pomiędzy dzieci swoie, w sposób następuiący: náystarszému wyznácza 1000 Cz: Zł: i ⅕ część resztuiącégo maiątku. Drugiému wyznácza 2000 Cz: Zł: i ⅕ część pozostałégo ieszcze bez rozrządzénia maiątku. Trzeciému wyznácza 3000 Cz: Zł: i ⅕ część reszty i t. d. powiększaiąc zawsze 1000 Cz: Zł: część piérwszą, maiącą się dostać co ráz młodszému dziécięciu.*

Tén maiątek równié był tym sposobém między wszystkié dzieci podzielony. Jakiż był? ilé się na iedno dziécię dostało? i ilé było dzieci?

Arytmetycznie. Gdyby ostatnié dziécię, prócz piérwszéy części podziału na nié przypádaiącégo brało nad to i część drugą; tedyby zostało się ieszcze ⅘ téy drugiéy części do dzielénia, a zatém całé dziedzictwo oyca nie byłoby podzielonć. Sama tedy część piérwszá maiątku dostaie się ostatniému dziécięciu w podziele. A ta część zamykać w sobie będzie tylé razy 1000 Cz: Zł: ilé ich oznaczy liczba, ostatnié dziécię w porządku starszéństwa wyrážaiącá toiest, będzie ta część tylé razy zawiérała 1000 Czerw: Złotych, ilé iest dzieci.

Piérwszá część maiątku przypádaiącá na dziécię przedostatnié zamknie w sobié 1000 Cz: Zł: tylé razy, ilé iest dzieci mniéy iednym, a wráz z drugą częścią zamknie tylé razy 1000 Cz: Zł: ilé iest dzieci: a zatém drugá część dostaiącá się przedostatniému dziecięciu będzie 1000 Cz: Zł.

Té 1000 Cz: Zł: które czynią drugą część maiątku dostaiącégo się przedostatniému dziécięciu są ⅕ częścią pozostałégo po podzielé poprzedzaiących dzieci maiątku oyca: a zatém to, co się ostatniému dziécięciu dostało, iest ⅘ tegoż maiątku pozostałégo. A ponieważ ⅕ czyni 1000 Czerw: Złot: więc ⅘ uczynią 4 razy tylé, toiest 4000 Cz: Zł. Liczba tedy dzieci iest 4. Dział na każdé dziécię przypádaiący 4000 Czerw: Zł: a cały maiątek oyca 16000 Cz: Zł.

Cały maiątek oyca	16000 Cz: Zł.
Piérwszá część działu náystarszégo dziécięcia . .	1000.
Zostaie się	15000.
Drugá część przypádaiącá na toż dziécię . . .	3000.
Zostaie się	12000.

Piérwſzá część 2go dziécięcia . . . . 2000. Cz: Zł:
Zoſtaie ſię . . . . 10000.
Drugá część tegoż . . . . 2000.
Zoſtaie ſię . . . . 8000.
Piérwſzá część 3go dziécięcia . . . . . . 3000.
Zoſtaie ſię . . . . 5000.
Drugá część tegoż . . . . 1000.
Zoſtaie ſię . . . . 4000.
Piérwſzá część 4go dziécięcia . . . . . . 4000.
Drugá część tegoż . . . . 0.

Części więc przypádaiącé na té dzieci ſą

Na piérwſzé 1000 i 3000 Cz: Zł: toieſt . . 4000. Cz: Zł:
Na drugié 2000 i 2000 Cz: Zł: toieſt . . 4000.
Na trzecié 3000 i 1000 Cz: Zł: toieſt . . 4000.
Na czwárté 4000 i 0 Cz: Zł: toieſt. . . . 4000.

Algiebr: Mian: Cały maiątek oyca . . . . x.
Ténże po wzięciu 1 wſzéy części działu przez
1 wſzé dziécię . . . . $x - 1000$.
Drugá część tegoż dziécięcia . . . . . . $\frac{1}{5}x - 200$.
Dział cały piérwſzégo dziécięcia . . . . . $\frac{1}{5}x + 800$.
Reſzta maiątku oyca . . . . $\frac{4}{5}x - 800$.
Po wzięciu 1 wſzéy części działu przez 2gié dziécię $\frac{4}{5}x - 2800$.
Drugá część drugiégo dziécięcia . . . . . . $\frac{4}{25}x - 560$.
Dział cały 2go dziécięcia . . . . $\frac{4}{25}x + 1440$.

Ponieważ zaś wſzyſtkié dzieci maią bydź równo podzieloné; więc w ſzczególności tylé ſię doſtaie piérwſzému, ilé i drugiému, a zatém:

Warunek $\frac{1}{5}x + 800 = \frac{4}{25}x + 1440$.

Przeráb: (Odiąwſzy 800) . . . . $\frac{1}{5}x = \frac{4}{25}x + 640$.
(Przywiódłſzy ułómki do
iednakowégo mianownika $\frac{5}{25}x = \frac{4}{25}x + 640$.
(Odiąwſzy $\frac{4}{25}x$) . . . $\frac{1}{25}x = 640$.
(Rozmnożywſzy przez 25) $1x = 16000$.
Reſzta iak wyżéy w poſtępowaniu Arytmetyczném.

Inſzé

Inſzé przykłady. Piérwſzé części działu przypádaiącégo na dzieci roſną iak liczby 1000, 2000, 3000, i t. d. Drugié części ſą $\frac{1}{6}$, albo $\frac{1}{7}$, albo $\frac{1}{8}$ i t. d. reſzty pozoſtałéy maiątku oyca.

Niech znowu piérwſzé części tego działu roſną iak liczby 1000, 3000, 5000, toieſt niech ta piérwſzá część naſtępnégo każdégo dziécięcia będzie 2000, np. Zł: większá niż poprzedzaiącégo: drugié zaś części niech będą $\frac{2}{7}$, albo $\frac{2}{9}$, albo $\frac{2}{11}$ i t. d. reſzt pozoſtałych. Albo ieſzcze niech piérwſzé części działu iak 1000, 4000, 7000 i t. d. toieſt niech ta piérwſzá część działu każdégo naſtępnégo dziécięcia będzie 3000 np. Zł. większá niż poprzedzaiącégo, a drugié części niech będą $\frac{3}{13}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{3}{19}$, i t. d. reſzt pozoſtałych.

87. *Zadanié 22. Szérokość pewnégo proſtokąta ieſt $\frac{2}{3}$ długości tegoż proſtokąta. Gdy zaś do każdégo boku dodámy po 1 ſtopie, powierzchniá tego proſtokąta powiękſzy ſię 21 ſtopami kwadratowémi.*

Fig. 19. Niech ABCD, będzie proſtokąt, którégo ſzukámy, a którégo ſzérokość BC, ieſt $\frac{2}{3}$ długości AB, albo DC. Niech ieſzcze będzie takim tén proſtokąt, aby dodáwſzy do każdégo z boków iego długość iednakową BE, DF, oznáczaiącą 1 ſtopę, zrobił ſię inny proſtokąt AEGF, którégo powiérzchniá większáby była 21 ſtop. kw. od powiérzchni tego 1go proſtokąta.

Powiękſzéniém powiérzchni ſzukanégo proſtokąta ieſt Węgielnica (Norma) BEGFDC, którą możná podzielić na dwa proſtokąty BI, DH, i na kwadrát CG. Tén kwadrát má 1 ſtopę kwadratową: więc dwa proſtokąty BI, DH, mieć powinny obadwa razém 20 ſtóp kw. Ponieważ zaś ſzérokość ich ieſt 1 ſtopa, a długość piérwſzégo BI, ieſt $\frac{2}{3}$ długości drugiégo DH; więc piérwſzy może bydź podzielony na 2, a drigi na 3 proſtokąty mnieyſzé iednakowéy długości i ſzérokości: więc 5 tych równych proſtokątów powiérzchniá zawiérać będzie 20 ſtóp kw: a zatém iedén z nich má w powiérzchni $\frac{1}{5}$ część 20 ſtóp kw. toieſt 4 ſtopy kwadr. Że zaś ſzérokość każdégo z nich ieſt na 1 ſtopę; więc długość każdégo z nich będzie na 4 ſtopy. Piérwſzy tedy proſtokąt BI, zawiéraiący w ſobie 2 takié proſtokąciki má 8 ſtóp kwadr. toieſt 1 ſtopę ſzérokości, a 8 długości; a drugi DH, zawieraiący w ſobie 3 takiéż proſtokąciki má 12 ſtóp kw. toieſt 1 ſtopę ſzérokości, a 12 długości. A że proſtokąt ſzukany má za ſzérokość, długość piérwſzégo z tych proſtokącików, a za długość, długość 2go z tych proſtokącików; więc ſzérokość iego będzie 8 ſtóp, a długość 12 ſtóp.

Széro-

Szérokość prostokąta szukanégo	. . .	8 stóp. kw.
Długość	. . . .	12.
Powiérzchniá	. . . .	96.
Szérokość 2go prostokąta	. . . . .	9.
Długość	. . . .	13.
Powiérzchniá	. . . .	117 stóp kw.
Różnica w powiérzchniach	. . . .	21 stóp kw.

Algiebr: Mian:

Długość szukanégo prostokąta	. .	x.
Szérokość	. . . .	$\frac{2}{3}x$.
Powiérzchniá	. . . . .	$\frac{2}{3}xx$.
Długość 2go prostokąta	. . .	$x+1$.
Szérokość	. . . .	$\frac{2}{3}x+1$.
Powiérzchniá	. . . . .	$\frac{2}{3}xx+\frac{5}{3}x+1$.
Różnica w powiérzchniach	.	$\frac{5}{3}x+1$.

Warunek. $\frac{5}{3}x+1=21$.

Przeráb: (Odiąwszy 1) . . . . $\frac{5}{3}x=20$.
(Podzieliwszy przez 5) . $\frac{1}{3}x=4$.
(Rozmnożywszy przez 3) $1x=12$.
Reszta rozwiązania iak wyżéy.

Uwága. Oznáczywszy szérokość piérwszégo prostokąta przez $2x$, długość przez $3x$, możná było uchronić się ułómków.

Insze przykłady. *Szérokość prostokąta iest $\frac{3}{4}$ długości iego: przydáwszy zaś 1 stopę do téy długości, a 2 stopy do szérokości; powiérzchniá tego prostokąta powiększy się 35 stop kw.*

Szérokość prostokąta iest $\frac{2}{5}$ iego długości: przydáwszy zaś iednę stopę do téy szérokości, a odiąwszy 2 stopy od długości; powiérzchniá iego powiększy się 31 stop. kw.

Szérokość prostokąta iest $\frac{3}{5}$ iego długości: uiąwszy zaś 2 stopy téy szérokości, a przydáwszy 1 stopę długości, powiérzchniá iego zmnieyszy się 37 stóp kw.

Szérokość prostokąta iest $\frac{4}{7}$ iego długości: odiąwszy zaś po 1 stopie od każdégo boku, powiérzchniá zmnieyszoná będzie 32 stop. kw.

88. *Zadanié 23. Osoba A, dała osobie B, połowę tylé, ilé iuż miała osoba B. Osoba znowu B, dała wzaiémnie Osobie A, połowę tylé, ilé się u A, zostało. Gdy té osoby dwa razy ieszcze podobné zamiany powtórzyły, znalazło się tak u A, iak i u B, po Zł. 729.*

Arytmetycznie. Za każdą razą takiéy zamiany maiątek tak Osoby A, iak i B, powiększa się połową tego, ilé się znayduie u A, lub u B; to iest staie się tén maiątek $\frac{3}{2}$ siebie samégo, albo co na iedno wychodzi, powiększénié t-go maiątku iest trzecią częścią tegoż maiątku wráz z powiększéniém.

Zatém idzie, iż, ponieważ A, má na końcu 729 Zł. wziąwszy od B, trzecią część tych 729 Zł. toiest 243; więc przed tym wziątkiém było tylko u A, Zł. 486. Ze zaś B, także má na końcu 729 Zł. dáwszy dlá A, Zł. 243; więc przed tym dátkiém było u B, 972 Zł. B, má 972, wziąwszy od A trzecią część toiest 324: więc przed tym wziątkiém było u B, tylko 648. Że zaś u A, po tym dátku 324 Zł. zostaie 486; więc przed tym było 810.

Tymże sposobém możná doyśdź stanu poprzedzaącégo maiątków tych osób, aż się naostatek dóydzie do piérwiástkowégo ich maiątku. Co następuiącá táblica przed oczy wystawia dostatecznie.

Maiątek . . . A.			Maiątek . . . . B.		
Na końcu		729 Zł.	Na końcu		729 Zł.
Przed wziątkiém	243 . .	486.	Przed dátkiem . .	243 . .	972.
Przed dátkiém . .	324 . .	810.	Przed wziątkiém	324 . .	648.
Przed wziątkiém	270 . .	540.	Przed dątkiém . .	270 . .	918.
Przed dátkiém . .	306 . .	846.	Przed wziątkiém	306 . .	612.
Przed wziątkiém	282 . .	564.	Przed datkiém . .	282 . .	894.
Przed dátkiém . .	298 . .	862.	Przed wziątkiém	298 . .	596.

Osoba A, miała więc na początku złotych . . . . . 862.

Osoba B, miała na początku złotych . . . . . . 596.

Algiebraicznie. Mianowanié. Maiątek piérwszy B. . . . x.
Maiątek piérwszy A. . $1458 - x$.

B, odebráwszy $\frac{1}{2}x$ má . . . . $\frac{3}{2}x$.
A, dáwszy $\frac{1}{2}x$ má . . . . . $1458 - \frac{3}{2}x$.
B, dáwszy $729 - \frac{3}{4}x$, má . . . $\frac{9}{4}x - 729$.

A, ode-

A, odebráwszy $729 - \frac{3}{4}x$, má . $2187 - \frac{9}{4}x$.
B, odebráwszy $\frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}$, má $\frac{27}{8}x - 1093\frac{1}{2}$.
A, dáwszy $\frac{9}{8}x - 364\frac{1}{2}$ má . . $2551\frac{1}{2} - \frac{27}{8}x$.
B, dáwszy $1275\frac{3}{4} - \frac{27}{16}x$, má . $\frac{81}{16}x - 2369\frac{1}{4}$.
A, odebráwszy $1275\frac{3}{4} - \frac{27}{16}x$, má $3827\frac{1}{4} - \frac{81}{16}x$.
B, odebráwszy $\frac{81}{32}x - 1184\frac{5}{8}$, má $\frac{243}{32}x - 3553\frac{7}{8}$.
A, dáwszy $\frac{81}{32}x - 1184\frac{5}{8}$, má . . $5011\frac{7}{8} - \frac{243}{32}x$.
B, dáwszy $2505\frac{15}{16} - \frac{243}{64}x$, má $\frac{729}{64}x - 6059\frac{13}{16}$.

Warunek. $\frac{729}{64}x - 6059\frac{13}{16} = 729$.

Przerábianié. (Dodáwszy $6059\frac{13}{16}$) $\frac{729}{64}x = 6788\frac{13}{16}$.
(Obróciwszy na ułómek drugą stronę)
$\frac{729}{64}x = \frac{108621}{16}$.
(Podzieliwszy obie strony przez 729.
$\frac{1}{64}x = \frac{149}{16}$.
(Rozmnożywszy wyrazy drugiégo ułómka przez 4)
$\frac{1}{64}x = \frac{596}{64}$.
(Rozmnożywszy przez 64) $1x = 596$.

Maiątek 1wszy B . . . . 596.
Maiątek 1wszy A . . . . 862.
B, wziąwszy 298, má . . . . . 894.
A, dáwszy 298, má . . . . . . 564.
B, dáwszy 282, má . . . . . . 612.
A, wziąwszy 282, má . . . . . 846.
B, wziąwszy 306, má . . . . . 918.
A, dáwszy 306, má . . . . . 540.
B, dáwszy 270, má . . . . . . 648.
A, wziąwszy 270, má . . . . . 810.
B, wziąwszy 324, má . . . . . . 972.
A, dáwszy 324, má . . . . . . 486.
B, dáwszy 243, má . . . . . . 729.
A, wziąwszy 243, má . . . . . 729.

Insze przykłady. Każdá z tych dwóch osób daie iedna drugiéy trzecią część tego co támta iuż má, i czyniąc to wzaiémnie po dwa lub trzy razy; będzie mieć na końcu tak iedna iak i drugá, w piérwszym razie po Zł. 256, w drugim po Zł. 4096.

 Niechby

Niechby znowu dáwały sobie po czwártéy części podobnie iak wyżéy, i niechby to po dwa lub trzy razy czyniły, a na końcu miały po Zł. 625 w piérwszym razie, a w drugim zaś po Zł. 15625.

89. *Zadanié 24. Maiątek osoby A, zawiérá w sobie maiątek osoby B, tylé razy, ilé i maiątek Osoby B, zawiérá w sobie maiątek Osoby A: z tém wszystkiém B, má więcéy 2 Zł. niż A.*

Uwdga. Wyrażénié dzielénia maiątku A, przez maiątek B, może bydź oznaczoné przez ułómek, którégoby licznikiém był piérwszy maiątek, a mianownikiém drugi. Toż mówić i o wyrażéniu maiątku B, podzielonégo przez maiątek A.

Algiebr: Mian: Maiątek A . . . . x.
Maiątek B . . . . $x + 2$.
Wyrażénié maiątku B, podzielonégo przez maiątek A . . . . $\frac{x+2}{x}$
Wyrażénié maiątku A, podzielonégo przez maiątek B . . . . $\frac{x}{x+2}$.

Warunek. $\frac{x+2}{x} = \frac{x}{x+2}$.

Przerób: (Przywiódłszy obadwa ułómki, do iednakowégo mianownika) $\frac{xx+4x+4}{xx+2x} = \frac{xx}{xx+2x}$.
(Rozmnożywszy obie strony przez $xx + 2x$, albo co na iedno wychodzi, oznáczywszy równość dwóch liczników, których mianowniki są iednakowé)
$xx + 4x + 4 = xx$.
(Odiąwszy xx) . . . . $4x + 4 = 0$.
(Odiąwszy 4) . . . . $4x = -4$.
(Podzieliwszy przez 4) . . . $1x = -1$.

Rozwią-

Rozwiązanié. $x = -1$. Maiątek osoby A, która w saméy rzeczy winna 1 Zł.

$x + 2 = +1$. Maiątek istotny Osoby B.

$\frac{x+2}{x} = \frac{+1}{-1} = -1$. Wieloráz z maiątku B, podzielonégo przez maiątek A.

$\frac{x}{x+2} = \frac{-1}{+1} = -1$. Wieloráz z maiątku A, podzielonégo przez maiątek B.

Uwága. Wyrażénié to $\frac{+1}{-1}$ wzięliśmy za równé tému -1. Jakoż liczba dzieląca przez wieloráz rozmnożoná, równá się zawsze liczbie podzielnéy: a zatém wieloráz taki tu bydź powinién, aby rozmnożywszy go przez -1 wypadło $+1$. A że tylko -1 iest takim wielorazém, który przez $+1$ rozmnożywszy wypadnie -1; więc wieloráz tén iest -1.

Podobnie możnáby dowieśdź, że wyrażénié to $\frac{-1}{-1}$ równá się tému $+1$.

Skąd można tę regułę dziélenia ustanowić względém znaków: że gdy dwa wyrazy maią przed sobą znak iednakowy; tedy wieloráz iest *przydayny*, gdy zaś dwa wyrazy maią znaki odmiénné, wtedy wieloráz iest *uiémny*. I tak:

$$\frac{+4}{+2} = +2; \quad \frac{-4}{-2} = +2; \quad \frac{+4}{-2} = -2; \quad \frac{-4}{+2} = -2.$$

Insze przykłady. Niech będzie takié iak wyżéy zadanié ztą różnicą, że B, ma więcéy 2000, albo 4000, albo 6000 i t. d. Zł. niż A.

ROZDZIAŁ III.

Zagadnienia, w które więcey wchodzi, niż ieden wyraz niewiadomy.

W przykładach Rozdziałów poprzedzaiących iednego tylko używaliśmy wyrazu niewiadomego, lubo kilku częstokroć ilości nam nie znanych szukaliśmy. Te przykłady tak były zawsze dobierane, że używszy w mianowaniu warunków iednego tylko znaku wystawuiącego ilość niewiadomą, i tey ilości doszedłszy, iuż tem samem doyśdź łatwo mogliśmy i innych ilości niewiadomych iako zawisłych od pierwszey.

Roztrząsnąwszy dobrze Zadanie, i zważywszy podane warunki, można obeyśdź się często w mianowaniu, iednym tylko znakiem ilości niewiadomey: ale w wielu okolicznościach, chcąc na iednym przestać znaku, stałby się ieszcze zawilszym sposób postępowania, albo dla wyrazów ułómkowych, albo dla ilości uiemnych, których ustrzédz się można, wprowadziwszy w mianowanie więcey niż ieden znak niewiadomy.

To pomnożenie znaków ilości niewiadomych nie powinno powiększyć ucznióm trudności, gdy iuż przez tyle poprzedzaiących przykładów wprawili się w działania z iednym takowym znakiem. Idąc za powszechnym zwyczaiem, używać będziemy ostatnich abecadła liter, iak *np.* x, y, z, do wyrażenia ilości niewiadomych.

90. *Zadanie I.*

3 łokcie sukna i 5 łokci materyi kosztowało . . . 83 Zł.
3 łokcie tegoż sukna i 7 łokci téyże materyi kosztowało 97.

Ileż kosztował każdy łokieć sukna i każdy łokieć materyi?

Arytmetycznie. W drugim razie tyle kupiło się sukna łokci co i w pierwszym, ale materyi kupiło się 2 łokcie więcey niż w pierwszym, i dało się też drugim razem więcey 14 Zł niż pierwszym: więc te dwa łokcie materyi kosztowały Zł. 14, a zatem 1 łokieć kosztował Zł. 7.

Za

Za 5 tedy łokci materyi przypadnie zł. 35: a że té 5 łokci materyi wraz z trzéma łokciami sukna kosztowały Zł. 83; więc 3 łokcie sukna kosztowały 83 Zł. mniéy 35 złotémi, toiest kosztowały 48 Zł: a zatém 1 łokieć sukna kosztował 16 Zł.

Cena 1go łokcia sukna	16 Zł.
Cena 1go łokcia materyi	7.
Cena 3ch łokci sukna	48.
Cena 5 łokci materyi	35.
Summa	83.

Cena trzech łokci sukna	48 Zł.
Cena 7 łokci materyi	49.
Summa	97 Zł.

Algiebraicznie. Cena 1go łokcia sukna . . . . x.
Cena 3ch łokci . . . . $3x$.
Cena 1go łokcia materyi . . . y.
Cena 5ciu łokci . . . . $5y$.
Cena 7miu łokci . . . . . . $7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 7y = 97. \\ 3x + 5y = 83. \end{cases}$

Przerábianié. (Od każdéy strony piérwszégo równania odiąwszy odpowiadaiącą stronę drugiégo równania) $2y = 14$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . . $1y = 7$

Położywszy tę ważność y, w którémkolwiek z piérwszych dwóch równań, *np.* w piérwszém będzie: $3x + 49 = 97$.
(Odiąwszy 49) . . . . $3x = 48$.
(Podzieliwszy przez 3) $1x = 16$.

Cena 1go łokcia sukna . . . . . 16 Zł.
Cena 1go łokcia materyi . . . 7. Tak iak téż znaleźliśmy, postępuiąc Arytmetycznie.

Można także to Zadanié rozwiązać, używaiąc tylko iednégo znaku niewiadomégo.

Cena

Cena 1go łokcia materyi . . . . . y.
Cena 7miu łokci . . . . $7y$.
Cena 5ciu łokci . . . . $5y$.
Cena 3ch łokci sukna . . $97 - 7y$.
albo . . . . . $83 - 5y$.

Warunek. $83 - 5y = 97 - 7y$.

(Dodáwszy $7y$) . . . $83 + 2y = 97$.
(Odiąwszy 87) . . . . . . $2y = 14$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . $1y = 7$.

$97 - 7y = 97 - 49 = 48$. Céna 3ch łokci sukna.

$\frac{97 - 7y}{3} = \frac{48}{3} = 16$. Cena 1go łokcia sukna iak wyżéy.

Inszé przykłady. Kupuie kto pewną liczbę łokci sukna po 15 Zł. i pewną liczbę łokci materyi po 8 Zł. Inną razą kupuie znowu pewną liczbę łokci sukna, po téyże co wyżéy cenie, i pewną liczbę łokci materyi po Zł. 6. Piérwszą razą należało się za wszystko Zł. 147, a drugą razą Zł. 129. Iléż było łokci sukna i materyi w piérwszym i drugim razie?

Arytmetycznie. Piérwszą razą zapłaciło się więcéy 2 Zł. tylé razy, ilé było łokci materyi. A że się zapłaciło piérwszą razą więcéy 18 Zł. niż drugą; więc 2 Zł. wzięté tylé razy, ilé było łokci materyi czynią Zł. 18, a 1 Zł. wzięty tylé razy, ilé było łokci materyi czyni Zł. 9. Było więc łokci 9 materyi.

Reszta rozwiązania nie powinna mieć żádnéy trudności, po wyłuszczéniu piérwszégo przykładu.

Użył kto iedną razą 12 mężczyzn, a 8 kobiét, do pewnéy roboty, i zapłacił za tę robotę ze wszystkiém gr. 328.

Inną razą, użył 12 mężczyzn, a 11 kobiét do pewnéy roboty, płacąc tylé każdéy osobie co i piérwéy: zapłacił zaś ze wszystkiém gr. 370.

Jakáż była płáca mężczyzny, a iaká kobiéty?

Zaciągá kto pewną liczbę robotników po gr. 15, a inną liczbę po gr. 12. Zapłacił wszystkim gr. 423.

Drugą razą zaciągá też ſamę co piérwéy liczbę robotników po gr. 15, i tylé znowu robotników po gr. 14, ilé ich naiął piérwéy po gr. 12: płaci zaś wſzyſtkim gr. 471.

Iléż było za każdą razą robotników?

91. *Zadanié 2. Pewny kupiec bierze za 15 łokci ſukna w zamianę Zł. 120, i dzieſięć łokci innégo ſukna.*

Inną razą bierze za 15 łokci piérwſzégo ſukna Zł. 150, i 8 łokci drugiégo ſukna.

Jakáż cena była piérwſzégo, a iaká 2go ſukna?

Arytmetycznie. Tén kupiec wziął w zamianie piérwſzą razą więcéy 2 łokcie drugiégo ſukna niż drugą: w pieniędzach zaś wziął 30 Zł. więcéy drugą razą. Więc cena dwóch łokci ſukna gatunku drugiégo ieſt 30 Zł: a zatém cena 1 łokcia ieſt 15 Zł. Cena 10 łokci ieſt 150 Zł. a ſumma téy ceny, i 120 Zł. ieſt 270 Zł. A że ta ſumma 270 Zł wyrównywá cenie 15 łokci ſukna gatunku piérwſzégo; więc zà 1 łokieć gatunku piérwſzégo przypádało Zł. 18.

Algiebr: Mian: Cena łokcia gatunku 1go . . . x.
Cena łokcia gatunku 2go . . . y.
Cena 15 łokci gatunku 1go $15x$.
Cena 10 łokci gatunku 2go $10y$.
Cena 8 łokci gatunku 2go . $8y$.

Warunek. $\begin{cases} 15x = 120 + 10y. \\ 15x = 150 + 8y. \end{cases}$

Przerábianié. (Porównáwſzy dwie wáżności $15x$)
$120 + 10y = 150 + 8y$.
(Odiąwſzy 120) . . . . . $10y = 30 + 8y$.
(Odiąwſzy $8y$) . . . . . . $2y = 30$.
(Podzieliwſzy przez 2) . . $1y = 15$.
$120 + 10y = 120 + 150 = 270$.
$15x = 270$.
$1x = 18$.

Rozwiązanié. $1x = 18$. Cena łokcia 1go gatunku.
$1y = 15$. Cena łokcia 2go gatunku.

$15x = 270$. Cena 15 łokci 1go gatunku.
$120 + 10y = 270$. { Cena tychże 15 łokci inaczéy wyra-
$150 + 8y = 270$. { żoná.

Uwága. Można było i w tém Zadaniu podobnie iak w piérwszém nie używać tylko iednégo znaku niewiadomégo.

Insze przykłady. Pewny rzemieślnik ochrániá 12 Zł. w każdy dzién, w który robi: wydaie zaś 5 Zł. w każdy dzién, w który nie robi. Po nieiakim czasie zebrál 238 Zł.

Inną razą tylé dni co i piérwszą robił, tylé téż złotych co i piérwéy codziénnie sobie ochraniaiąc: nie robił przez tylé także dni, co i piérwéy, a w każdy taki dzién wydáwál po Zł. 8. W takim zaś, iak wyżéy przeciągu czasu ochronił sobie Zł. 208 tylko.

Iléż dni robił, i ilé nie robił?

Inny rzémieślnik ochránid sobie 14 Zł. w każdy dzién, w który robi, wydaie zaś Zł. 8 w każdy dzién, w który nie robi. Po nieiakim czasie ochronił sobie Zł. 324.

Innym razém robił mniéy 3 dniami, a nie robił więcéy 3 dniami, zamiást iednak 8 Zł. wydáwál Zł. 10 w każdy dzién, w który nie robił. Ochronił sobie w przeciągu tego samégo co wyżéy czasu Zł. 228.

Uwága. W przykładach poprzedzaiących spółczynniki iednéy z dwóch niewiadomych ilości wchodzących we dwa równania skłádaiące warunek, były iednakowé, i przeto można było z łatwością przywieśdź zadanié do iednéy niewiadoméy ilości. Do tego célu zmiérzá się i we wszystkich Zagádniéniach, maiących więcéy niż iednę ilość niewiadomą: i tym końcém czynią się działania, przez które iednéy z ilości niewiadomych równé daią się spółczynniki.

92. *Zadanié 3.*

3 łokcie sukna i 5 łokci materyi kosztowało . . . . Zł. 83.
6 łokci tegoż sukna, i 7 łokci téyże materyi kosztowało . 145.

Jakáż iest cena iednégo łokcia sukna, i iednégo łokcia materyi?

Arytmetycznie. Gdyby w piérwszym razie tylé się kupiło łokci sukna co i w drugim, toiest łokci 6, a materyi także tylé drugié, toiest łokci 10; tedy warunek piérwszy odmiéniłby się w następuiący:

6 Łokci

6 Łokci sukna, 10 łokci materyi kosztowało Zł. 166.

A że w drugim razie 6 łokci sukna, i 7 łokci materyi kosztowało Zł. 145.

Więc 3 łokcie materyi kosztowały Zł. 21, a zatém 1 łokieć kosztował Zł. 7.

5 tedy łokci materyi kosztowało Zł. 35, a 3 łokcie sukna kosztowało Zł. 83 mniéy 35 Zł. toiest kosztowały Zł. 48: a zatém 1 łokieć kosztował Zł. 16.

Algiebr: Mian:	Cena łokcia sukna	x.
	Cena łokcia materyi . . .	y.
	Cena 3 łokci sukna . . .	$3x$.
	Cena 5 łokei materyi . . .	$5y$.
	Cena 6 łokci sukna . . .	$6x$.
	Cena 7 łokci materyi . . .	$7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 5y = 83. \\ 6x + 7y = 145. \end{cases}$

Przerób: (Rozmnożywszy strony obiedwie piérwszégo równania przez 2, aby dadź równé spółczynniki iednéy z dwóch niewiadomych ilości, toiest x) $6x + 10y = 166.$
$6x + 7y = 145.$

(Odiąwszy strony drugiégo równania od strón piérwszégo) $3y = 21.$ (W tém równaniu iedna iuż tylko iest niewiadomá)

(Podzieliwszy przez 3) $1y = 7.$

Położywszy tę ważność y, w piérwszém równaniu $3x + 5y = 83.$ będzie $3x + 35 = 83.$

(Odiąwszy 35) . . . . . $3x = 48.$

(Podzieliwszy przez 3) . . $1x = 16.$

Rozwiązanié.	$x = 16.$	Cena łokcia sukna.
	$3x = 48.$	Cena 3 łokci.
	$6x = 96.$	Cena 6 łokci.
	$y = 7.$	Cena łokcia materyi.
	$5y = 35.$	Cena 5 łokci.
	$7y = 49.$	Cena 9 łokci.

Sprawdzénié. $48 + 35 = 83$.
$96 + 49 = 145$.

Inſzé przykłady. *5 Mężczyzn i 7 kobiét, wydało Zł. . . . . . 82.*
15 Mężczyzn i 8 kobiét, wydało Zł. . . . . 168.
Iléż wydáł każdy mężczyzna i każdá kobiéta?

Pewny kupiec za 12 łokci ſukna wziął 14 łokci materyi, i oprócz tego Zł. 86. Ténże ſám kupiec za 48 łokci tegoż ſukna wziął 50 łokci téyże materyi, oprócz tego Zł. 384. Jakáż była cena łokcia ſukna tego i łokcia materyi?

Uwága. W przykładach poprzedzaiących można było łatwo uczynić równémi ſpółczynniki, iednéy z dwóch ilości niewiadomych w obudwóch równaniach, a to dlá tego, że ſpółczynnik ilości niewiadoméy w jednéni równaniu był wielokrotnym (multiplus) ſpółczynnika téyże niewiadoméy w drugim równaniu. Doſyć więc było dlá uczynienia równémi tych ſpółczynników, rozmnożyć ſtrony równania drugiégo przez wieloráz pochodzący z ſpółczynnika większégo podzielonégo przez ſpółczynnika mnieyſzégo.

Ale gdy ſpółczynniki iednéy z jlości niewiadomych nie zawiéraią ſię zupełnie iedén w drugim; w tedy poſtąpić ſobie trzeba podobnie iak w obróceniu ułómków z różnémi mianownikami na ułómki z jednakowym mianownikiém, mnożąc obiedwie ſtrony iednégo równania, przez ſpółczynnika téy ilości niewiadoméy drugiégo równania, któréy ſię pozbydź chcémy, i znowu mnożąc obiedwie ſtrony drugiégo równania przez ſpółczynnika, który má taż ilość niewiadomá w piérwſzém równaniu.

93. *Zadanié 4.* *3 korce pſzenicy, i 4 korce żyta, koſztowało Zł. 58.*
5 korcy pſzenicy, i 7 korcy żyta, koſztowało Zł. 99.
Iléż koſztowáł korzec żyta, ilé korzec pſzenicy?

Arytmetycznie. Ponieważ 3 korce pſzenicy, i 4 korce żyta koſztowały Zł. 58; więc 15 korcy pſzenicy, i 20 korcy żyta koſztowałyby złotych 290.

Tak też ponieważ 5 korcy pſzenicy i 7 korcy żyta koſztowały Zł. 99; więc 15 korcy pſzenicy, i 21 korcy żyta, koſztowałyby Zł. 297.

A że w drugiém kupnie byłoby korcém żyta więcéy niż w piérwſzém, i dlá tego téż w drugim razie zapłaciłoby ſię 7 Zł. więcéy niż w piérwſzym; więc korzec żyta koſztowál Zł. 7.

Algiebr:

Algiebr: Mian: Cena korca pſzenicy . . . . . . x.
Cena 3ch korcy . . . . $3x$.
Cena 5 korcy . . . . $5x$.
Cena korca żyta . . . . y.
Cena 4 korcy . . . . $4y$.
Cena 7 korcy . . . . $7y$.

Warunek. $\begin{cases} 3x + 4y = 58. \\ 5x + 7y = 99. \end{cases}$

Przeráb: (Rozmnożywſzy ſtrony 1go równania przez 5)

$15x + 20y = 290.$

(Rozmnożywſzy ſtrony 2go równania przez 3)

$15x + 21y = 297.$

(Odiąwſzy ſtrony 1wſzégo równania od ſtrón drugiégo)

$1y = 7.$

Tymże ſpoſobém można by pozbydź ſię ilości niewiadoméy, y chcąc przyśdź do takiégo równania, w kſóréby tylko wchodziła ſama niewiadoma x.

(Rozmnożywſzy przez 7, ſtrony 1go równania)

$21x + 28y = 406.$

(Rozmnożywſzy przez 4, ſtrony drugiégo równania)

$20x + 28y = 396.$

(Odiąwſzy ſtrony drugiégo równania, od ſtrón piérwſzégo)

$1x = 10.$

Można także było tak iak wyżéy położyć w jednéin z dwóch równań zamiáſt y, ważność y znalezioną: i tak pozbywſzy ſię niewiadoméy y, dochodzić ważności drugiéy niewiadoméy x, w równaniu iuż uwolnionéin od piérwſzéy niewiadoméy.

Rozwiązanié. $x = 10.$ Cena korca pſzenicy.
$3x = 30.$ Cena 3 korcy.
$5x = 50.$ Cena 5 korcy.
$y = 7.$ Cena korca żyta.
$4y = 28.$ Cena 4 korcy.
$7y = 49.$ Cena 7 korcy.

Spráwdzenié. $\begin{cases} 30 + 28 = 58. \\ 50 + 49 = 99 \end{cases}$

Inſzé przykłady. *5 Mężczyzn i 7 kobiét wydało Zł.* *123*
8 Mężczyzn i 9 kobiét wydało Zł. . . . . . . *177.*
Iléż wydáł każdy mężczyzna? i ilé każdá kobiéta?

Kupił kto wina 15 butelek iednégo gatunku, a 11 butelek drugiégo. Dáł za wſzyſtko Zł. 197.

Kupił powtóré 16 butelek piérwſzégo gatunku, a 15 butelek drugiégo, i zapłacił Zł. 233.

Po czémuż przypádała butelka piérwſzégo i drugiégo gatunku?

Przeſtroga. Gdy znaki poprzedzaiącé ilość niewiadomą, któréy ſię pozbydź chcemy ſą przeciwné, toieſt + i —, w dwóch równaniach; wtedy przywiódłſzy ſpółczynników ilości niewiadoméy do równości w obudwóch równaniach, trzeba té równania iuż nie odeymować iak wyżéy iedno od drugiégo, ale do ſiebie dodáwać, aby tym ſpoſobém wyſadzić iednę ilość niewiadomą.

94. *Zadanié 5.* *5 Korcy pſzenicy, i 8 korcy żyta koſztowało Zł. 85. Za 12 korcy pſzenicy dano w zamianę 11 korcy żyta, i 53 Zł. Jakáż była cena korca pſzenicy i korca żyta?*

Opuſzczą ſię tu rozumowania Arytmetyczné mało co od poprzedzających różniącé ſię. Célém głownieyſzym ieſt teráz dlá nás rozwiązanié Zagádnién, wprowadzaiąc w nié w rzeczy ſaméy wielé ilości niewiadomych.

Mianowanié.	Cena korca pſzenicy	x.
	Cena 5 korcy	$5x$.
	Cena 12 korcy	$12x$.
	Cena korca żyta	y.
	Cena 8 korcy	$8y$.
	Cena 11 korcy	$11y$.

Warunek. $\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53. \end{cases}$

Przeráb: Dlá pozbycia ſię niewiadoméy y rozmnóżmy ſtrony piérwſzégo równania przez 11, a drugiégo przez 8 będzie . . . .

. . . $\begin{cases} 55x + 88y = 935. \\ 96x - 88y = 424. \end{cases}$

(Dodá-

(Dodáwſzy ſtrony odpowiadaiące ſobie) $151x = 1359$.
(Podzieliwſzy przez 151) . . . . . . $1x = 9$.

Dlá pozbycia ſię niewiadomey x rozmnóżmy ſtrony piérwſzégo rówmania przez 12, a drugiégo przez 5, będzie $\begin{cases} 60x + 96y = 1020. \\ 60x - 55y = 265. \end{cases}$

(Odiąwſzy drugié równanié od piérwſzégo) $151y = 755$.
(Podzieliwſzy przez 151) . . . . . . $1y = 5$.

Rozwiązanié. Cena korca pſzenicy . . . 9 Zł.
Cena 5 korcy . . . . . 45.
Cena 12 korcy . . . 108.
Cena korca żyta . . . . 5 Zł.
Cena 8 korcy . . . . . 40.
Cena 11 korcy . . . . . 55.

Sprawdzénié. $\begin{cases} 45 + 40 = 85. \\ 108 - 55 = 53. \end{cases}$

Inſzé przykłady. Na zapłacénié 464 liwrów Francuzkich, dano 12 Luidorów, i 16 Cz: Zł:

Dłużnik winnym będąc 243 liwrów Francuzkich, dáł 17 Luidorów, a wrócono mu 15 Cz: Zł. Jakáż tu rachuie ſię wáżność Luidorów i Cz: Zł: w Liwrach Francuzkich?

Na zapłacénié 769 złotych Polſkich, dano 12 luidorów i *17 Czer: Zł. Dłużnik winnym będąc 694 złotych Polſkich, dáł 25 Luidorów, a wrócono mu 18 Cz: Zł. Na iéż tu złotych Polſkich wypádáł Luidor i czerwony złoty.* (Obácz w Arytmetyce Rozdziáł V. Części IV.)

Uwága. Spoſób poſtępowania którégo użyliśmy w rozwięzywaniu Zagádnień zawiéraiących dwa równania, każdé z dwiéma niewiadomémi, náyogólniéy bydź może przyſtóſowanym. Są atoli inſzé ieſzcze ſpoſoby, mniéy lub więcéy wygodné, podług różnych przypádków.

95. Powtórzmy zadania poprzedzaiącégo, dwa równania:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 85. \\ 12x - 11y = 53 \end{cases}$$

(W piérwſzém równaniu odiąwſzy $8y$ po obu ſtronach)

$$5x = 85 - 8y.$$

(Podzie-

(Podzieliwszy przez 5) . . . $1x = 17 - \frac{8y}{5}$.

(W wyrazie $12x$ drugiégo równania, położywszy zamiast x, ważność iego znalezioną) $204 - \frac{96y}{5} - 11y = 53$.

(Rozmnożywszy obie strony przez 5)

$1020 - 96y - 55y = 265$.

toiest $1020 - 151y = 265$.

(Dodáwszy $151y$ do obu strón) . . . $1020 = 265 + 151y$.

(Odiąwszy 265 od obu strón) . . . $755 = 151y$.

(Podzieliwszy obie strony przez 151) . . $5 = 1y$.

A że . . . . $1x = 17 - \frac{8y}{5}$.

więc . . . . $1x = 17 - 8 = 9$.

Zgádzá się to zupełnie z poprzedzaiącém rozwiązaniém.

Tén sposób nazywá się *sposobém zamiany* (Methodus substitutionis.) Wygodnie iest wtedy go osobliwie zażywać, gdy w działania nasze ułómków nie wprowádzá.

96. *Sposób porównywania.* Uwolniymy x od spółczynnika w piérwszém równaniu, tak iak wyżéy, będzie $1x = 17 - \frac{8}{5}y$.

Zróbmy toż samo w drugiém równaniu, będzie $1x = \frac{53}{12} + \frac{11}{12}y$.

Zrównáymy dwie ważności x, będzie . $17 - \frac{8}{5}y = 4\frac{5}{12} + \frac{11}{12}y$.

Dodáymy $\frac{8}{5}y$ do obu strón . . . . $17 = 4\frac{5}{12} + \frac{11}{12}y + \frac{8}{5}y$.

Odeymiymy $4\frac{5}{12}$ od obu strón . . $12\frac{7}{12} = \frac{11}{12}y + \frac{8}{5}y$.

Przywiedźmy ułómki do iednakowégo mianownika . . . . . $12\frac{35}{60} = \frac{55}{60}y + \frac{96}{60}y$.

Wykonáymy oznaczoné dodanié . . $12\frac{35}{60} = \frac{151}{60}y$.

Rozmnóżmy obie strony przez 60 . . . . $755 = 151y$.

Podzielmy obie strony przez 151 . . . . . $5 = 1y$. tak iak wyżéy.

97. *Uwága.* Jeżeli chcémy uchronić się ułómków, pozbywszy się niewiadoméy x w obudwóch równaniach; trzeba téyże niewiadoméy x zostawić iéy spółczynników, i uczynić ié równémi, rozmnożywszy wzaiémnie iedné-

iednégo przez drugiégo. I tak we dwóch poprzedzaiących równaniach, zostawiwszy x po iednéy stronie z swoim spółczynnikiém, będzie

$$\begin{cases} 5x = 85 - 8y. \\ 12x = 53 + 11y. \end{cases}$$

Rozmnożywszy piérwszé równanié przez 12, a drugié przez 5, będzie $\begin{cases} 60x = 1020 - 96y. \\ 60x = 265 + 55y. \end{cases}$

Zrównáwszy dwie ważności $60x$:

$$1020 - 96y = 265 + 55y.$$

Dodáwszy $96y$ po obu stronach $1020 = 265 + 151y$.
Odiąwszy 265 . . . . . . $755 = 151y$.
Podzieliwszy przez 151 . . . $5 = 1y$. tak iak wyżéy.

98. *Zadanié 6. Dál kto 1200 Zł: na pewny procént, a 1700 Zł. na inny procént. Odebrál w obudwóch razém procéntach Zł. 191.*

Kto inny znowu dál 8000 Zł. na piérwszy procént, a 1500 Zł. na drugi: i odebrál całégo procéntu Zł: 585.

Jakiéż były té dwa procénta?

Mianowanié. Niech będzie piérwszy procént od 100 . . x.
Procént od 1200 Zł: . . . . . . $12x$.
Procént od 8000 Zł. . . . . . $80x$.
Niech będzie 2gi procént od 100 . . y.
Procént od 1700 Zł. . . . . . $17y$.
Procént od 1500 Zł. . . . . . $15y$.

Warunek. $\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 80x + 15y = 585. \end{cases}$

Przerábianié. Podzieliwszy strony drugiégo równania przez 5, dla większéy w dalszém działaniu łatwości, będzie . . . . $16x + 3y = 117$. Że zaś piérwszé równanié do prościeyszych wyrazów bydź przywiedzioném nié może; więc $\begin{cases} 12x + 17y = 191. \\ 16x + 3y = 117 \end{cases}$

Ponieważ piérwszym sposobém postępuiąc za cél iedyny to sobie wystawuiémy, aby spółczynniki iednéy z niewiadomych *np.* x uczynić równémi; gdy tedy dostąpić tego można krótszą drogą, a nie przez mnóżénié całych tych spółczynników iednégo przez drugi, umnieyszymy sobie pracy, i ochro-

 nimy

nimy czaſu. A że dwa ſpółczynniki niewiadoméy x, mogą bydź zupełnie podzielone przez 4; więc możémy ié przywieśdź do równości, mnożąc wyrazy piérwſzégo równania, przez 4, toieſt przez wielorąz z 16 podzielonych przez 4: i znowu mnożąc wyrazy drugiégo równania przez 3, toieſt przez wielorąz z 12 przez 4 podzielonych. Wypadną po takowém mnożéniu dwa równania $\begin{cases} 48x + 68y = 764. \\ 48x + 9y = 351. \end{cases}$

(Odiąwſzy 2gié równanié, od 1wſzégo) . . . $59y = 413.$
(Podzieliwſzy przez 59) . . . . $1y = 7.$
Aby znaléźć ważność x, w równaniu np. $16x + 3y = 117.$
Połóżmy zamiáſt y, iego ważność, a będzie $16x + 21 = 117.$
(Odiąwſzy 21) . . . . $16x = 96.$
(Podzieliwſzy przez 16) . . . . $1x = 6.$

Rozwiązanié. Piérwſzy procént od 100 . . . . . . 6.
Procént od 1200 . . . . 72.
od 8000 . . . . 480.

Drugi procént od 100 . . . . 7.
Procént od 1700. . . . . 119.
od 1500. . . . . 105.

Sprawdzénié. $\begin{cases} 72 + 119 = 191. \\ 480 + 105 = 585. \end{cases}$

Inſzé przykłady. 8000 Zł. danych na pewny procént a 15000 Zł. danych na inny procént, przynioſły zyſku całégo Zł. 1450.

12000 Zł. danych na 1wſzy procént a 25000 Zł. danych na drugi procént, przynioſły zyſku całégo Zł. 2350.

Jakież ſą té dwa procénta?

Uwága. Ponieważ w przykładach poprzedzaiących ſummy dané zawiérały w ſobie ſta zupełnie bez żádnéy reſzty; można więc było wyznaczyć ich procénta nie wprowádzaiąc ułómków.

Trzeba iednak wprawiać Uczniów, i na takich przykładach, w któré wchodzą ułómki.

Przykład. 1225 Zł. danych na pewny procént a 1240 Zł. danych na inny procént, przynioſły ze wſzyſtkiém zyſku 222 Zł.

2375 Zł. danych na piérwszy procént, a 3270 Zł. danych na drugi rocént, przyniósłszy ze wszystkiém zysku 517 Zł.

Jakiéż były té procénta?

Mianowanié. Procént 1wszy od 100 . . . . x.

. . . . od 1225 Zł . . . $\frac{1225x}{100}$.

. . . . od 2375 Zł. . . . $\frac{2375x}{100}$.

Procént 2gi od 100 . . . . . . y.

. . . . . . od 1240 . . . $\frac{1240y}{100}$.

. . . . . . od 3270 . . . $\frac{3270y}{100}$.

Warunek. $\begin{cases} \frac{1225x}{100} + \frac{1240y}{100} = 222. \\ \frac{2375x}{100} + \frac{3270y}{100} = 517. \end{cases}$

Przerábianié. (Rozmnożywszy przez 100 strony obudwóch równáń)

$\begin{cases} 1225x + 1240y = 22200. \\ 2375x + 3270y = 51700. \end{cases}$

(Podzieliwszy przez 5 strony obudwóch równáń)

$\begin{cases} 245x + 248y = 4440. \\ 475x + 654y = 10340. \end{cases}$

(Rozmnożywszy przez 95 strony piérwszégo równania, a przez 49 strony drugiégo) $\begin{cases} 23275x + 23560y = 421800. \\ 23275x + 32046y = 506660. \end{cases}$

(Odiąwszy strony 1go równania od strón 2go . . . . $8486y = 84860$.

(Podzieliwszy przez 8486) . . . $1y = 10$.

 Poło-

Położywſzy tę ważność y w równaniu $245x + 248y = 4440$.
będzie . . . . $245x + 2480 = 4440$.
(Odiąwſzy 2480) . . . . $245x . . . . = 1960$.
(Podzieliwſzy przez 245) . . . . $1x = 8$.

Rozwiązanié. $x = 8$. Procént 1wſzy od 100.

$\frac{1225x}{100} = 98$. Procént od 1225 Zł.

$\frac{2375x}{100} = 190$. Procént od 2375 Zł.

$y = 10$. Procént 2gi od 100.

$\frac{1240y}{100} = 124$. Procént od 1240 Zł.

$\frac{3270y}{100} = 327$. Procént od 3270 Zł.

Spráwdzénié. $\begin{cases} 98 + 124 = 222. \\ 190 + 327 = 517. \end{cases}$

99. *Zadanié 7. Trzy oſoby A, B, i C, rozbiéraią między ſiebie 24 warcabów.*

A, udziélá dwôm innym każdéy z oſobna tylé, ilé każdá iuż miała.

B, potém udziélá dwóm innym każdéy z oſobna tylé, ilé iuż każdá má.

C, naoſtatek udziélá dwóm innym każdéy z oſobna tylé, ilé każdá z nich má.

Po takowych udziáłach każdá z tych oſób mieć będzie po 8 warcabów. Iléż warcabów miała każdá oſoba przy piérwſzém rozebraniu między ſiebię tychże warcabów?

Mianowanié. Liczba warcabów, którą naſtępnie maią té trzy oſoby:

	B.	C	A.
Na początku má	x	y	$24 - x - y$.
Po udziele od A,	$2x$	$2y$	$24 - 2x - 2y$.
Po udziele od B,	$4x - 24$	$4y$	$48 - 4x - 4y$.
Po udziele od C,	$8x - 48$	$8y - 24$	$96 - 8x - 8y$.

Waru-

Warunek. $\begin{cases} 8x - 48 = 8. \\ 8y - 24 = 8. \end{cases}$

Przeróbianié. (Dodáwſzy 48 po obu ſtronach 1go równania a 24 po obu ſtronach 2go równania) $8x = 56.$
$8y = 32.$
a zatém $x = 7.$
$y = 4.$

Liczba warcabów.

	B.	C.	A.
Na początku	7	4	13.
Po udziele od A	14	8	2.
Po udziele od B	4	16	4.
Po udziele od C	8	8	8.

Inſzé przykłady. Té trzy oſoby, które w piérwſzym razie udzielały ſobie po razu ſwoich warcabów, niechby ich ſobie w podobny iak wyżéy ſpoſób udzielały po dwa razy: naoſtatek mieć będą po 64 warcaby.

Niechby znowu udzielały ich ſobie po trzy razy: mieć będą naoſtatek po 512 warcabów.

Każdá z tych 3 oſób daie każdéy ze dwóch innych tylé dwoie, ilé każdá z nich má: po iednéy takiéy zamianie, każdá z 3 oſób mieć będzie po 27, a po dwóch takich zamianach, każdá mieć będzie po 729.

Każdá z tych trzech oſób, daie każdéy ze dwóch innych połowę tego co iuż má: a po iednokrotném udzielaniu wzaiemném mieć będą po 27, a po dwukrotném udzielaniu mieć będą po 729.

Co do poſtępowania Arytmetycznégo obácz Rozdziału I. Zadanié 28, i Zadanié 23. Rozdziału II.

100. *Zadanié 8. Trzeba znaleźć proſtokąt, którégo ani długości, ani ſzérokości nie mámy wiadoméy: wiémy tylko, że gdyby był 3 ſtopami dłuższy, a 2 ſzérſzy; tedy powiérzchniá iego większá byłaby 47 ſt. kwadr: gdyby zaś więcéy miáł na 4 ſtopy długości, a na 3 ſzérokości; tedy powiérzchniá iego powiększyłaby ſię 70 ſtóp kw.*

Jakiéż ſą wymiary iwſzégo tego proſtokąta?

Przygotowanié. Niech będzie ABCD, proſtokąt ſzukany, którégo długości AB, dodáliśmy liniią BE, wyrážaiącą 3 ſtopy, a ſzérokości AD, doFig. 20.

 dali-

daliśmy liniią DG, wyrażaiącą 2 ftopy. Powiękfzénié powiérzchni 1wfzégo proftokąta fkładać fię będzie ze dwóch proftokątów, CG, BH, i z proftokąta CF, maiącégo 6 ftóp kw. Więc fumma proftokątów CG, BH, czyni 41 ftóp kw. Piérwfzy z tych proftokątów może fię rozłożyć na dwa inné maiącé fzérokości 1 ftopę, a długość równą długości fzukanégo proftokąta. Drugi także z tych proftokątów, może fię rozłożyć na trzy inné maiącé fzérokości 1 ftopę, a długość równą fzérokości fzukanégo proftokąta. Summa zaś tych 5 proftokątów wyrównywá iednému proftokątowi maiącému 1 ftopę fzérokości, a długość równą fummie długości dwa razy wziętéy, a fzérokości trzy razy wziętéy fzukanégo proftokąta. Piérwfzy więc warunek na tén wychodzi, iż fumma długości proftokąta fzukanégo dwa razy wziętéy, i fzérokości trzy razy wziętéy powinna uczynić 41 ftóp. Tymże fpofobém dowiédźby można, iż i drugi warunek na to wychodzi, że fumma długości proftokąta fzukanégo 3 razy wziętéy, i fzérokości 4 razy wziętéy powinna uczynić 58 ftóp.

Mianowanié. Długość fzukanégo proftokąta . . . . . x.
Szérokość . . . . y.

Warunek. $\begin{cases} 2x + 3y = 41. \\ 3x + 4y = 58. \end{cases}$

Przerób: (Przywiódłfzy do równości fpółczynniki niewiadoméy x)

$$\begin{cases} 6x + 9y = 123. \\ 6x + 8y = 116. \end{cases}$$

(Odiąwfzy 2gié równanié od 1wfzégo $1y = 7$.

(Przywiódłfzy fpółczynniki niewiadoméy y, do równości)

$$\begin{cases} 8x + 12y = 164. \\ 9x + 12y = 174. \end{cases}$$

(Odiąwfzy 1wfzé równanié od 2go) $1x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Długość proftokąta fzukanégo.
$y = 7$. Szérokość proftokąta fzukanégo.

70 Powiérzchniá.
$x + 3 = 13$. Długość powtórná.
$y + 2 = 9$. Szérokość powtórná.

117. Powiérzchniá.
47. Różnica powiérzchni 2giéy od 1wfzéy.

$x + 4 = 14$.

$x+4=14$. Długość trzecia.
$y+3=10$. Szérokość trzecia.

140. Powiérzchnia.
70. Różnica powiérzchni 3ciéy od 1wszéy.

Uwági w przygotowaniu do mianowania służyły tylko do skrócénia onégo. Możnáby iednak i bez tych uwág przyśdź do tychże samych równáń. I tak:

1wszá długość . . . . x. Drugá długość . . . $x+3$.
1wszá szérokość . . . . y. Drugá szérokość . . . $y+2$.
1wszá powiérzchniá . . xy. Drugá powiérzchniá $xy, +2x, +3y+6$.

Różnica . . . . . $2x+3y+6$.

3ciá długość . . . . . $x+4$.
3ciá szérokość . . . . . $y+3$.
3ciá powiérzchniá . . $xy+3x+4y+12$.

Różnica . . . $3x+4y+12$.

Warunek. $\begin{cases} 2x+3y+6=47. \\ 3x+4y+12=70. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} 2x+3y=41. \\ 3x+4y=58 \end{cases}$ Té to są samé równania, które wchodziły w warunki wyżéy z uwág poprzedzaiących wyprowadzoné.

Insze przykłady. Nie wiémy wymiarów iakiégo prostokąta, wiémy tylko, że przydáwszy stóp 3 do iego długości, a stóp 4 do iego szérokości, powiérzchniá iego powiększy się 80 st. kw.

Przydáwszy zaś do długości tego prostokąta niewiadomégo stóp 4, a stóp 3 do iego szérokości, powiérzchniá iego byłaby powiększoná 77 stopami kw.

Uwága. W tym przykładzie tymże samym postąpić možná sobie sposobém co i w poprzedzaiącym. Možná iednak przerábianié łatwiéy ieszcze wykonać.

Dowiedzénié tego, iż dwa warunki wychodzą na następuiącé, iest to samo co wyżéy.

Summa długości 4 razy wziętéy, i szérokości 3 razy wziętéy iest . . . . 68.

Summa

Summa długości 3 razy wziętéy, i szérokości 4 razy wziętéy iest . . . . 65.

Dodáwszy té 2 równania, będzie 7 razy długość, i 7 razy szérokość . . . . 133.

Więc summa poiedynczéy długości, i poiedynczéy szérokości, iest . . . . 19.

Odiąwszy drugié równanié od 1wszégo, długość ráz wziętá, mniéy szérokością ráz wziętą, będzie . . . . 3.

Więc to Zadanié wychodzi na następuiącé, które iest bardzo łatwé do rozwiązania. *Różnica dwóch ilości iest 3. summa iest 19.*

Jakiéż są té ilości?

Znaydziémy odpowiédź: 11 na długość
8 na szérokość. (Obácz w Rozdziale I. Zadanié 3.)

Tę uwágę przystósować można do wszystkich przypádków, w których spółczynniki iednéy niewiadoméy w piérwszém równaniu są równé spółczynnikóm drugiéy niewiadoméy w drugiém równaniu: a wzaiémnie spółczynniki drugiéy niewiadoméy w piérwszém równaniu, są równé spółczynnikóm piérwszéy niewiadoméy w drugiém równaniu: znaki zaś przed tą samą niewiadomą w obudwóch równaniach są iednakowé.

Przykład zagadniénia, które zdaie się bydź *wyznaczoném* (Problema determinatum) a w saméy rzeczy iest *niewyznaczoném.* (Problema indeterminatum.

Nie wiémy wymiarów iakiégo prostokąta: wiémy tylko, że dodáwszy 2 stopy do iego długości, a 3 stopy do iego szérokości; powiérzchniá iego powiększy się 56 stóp kwadr: ieżeli zaś dodámy 4 stopy do długości, a 6 stóp do szérokości; powiérzchniá powiększy się 124 stóp kwadr.

Fig. 21. Niech będzie iakikolwiek prostokąt ABCD, do którégo długości dodaná iest CG, wyráżaiącá 2 stopy: do szérokości zaś iego dodaná iest AE, wyráżaiącá 3 stopy. Powiększéniém powiérzchni tego prostokąta będzie summa prostokątów CI, BE, i IH.

Dodáwszy ieszcze do długości liniią GN, wyráżaiącą także 2 stopy, a do szérokości liniią EL, wyrážaiącą także 3 stopy; węgielniczka GNMLEF, którą powiększony iest powtórnie prostokąt, przeniesie węgielniczkę CGFEAB, którą naprzód był powiększony ténże prostokąt, prostokątém HQMO, dwa razy tak wielkim, iak prostokąt BIFH, toiest w danym przypádku przeniesie ią prostokątém zawiéraiącym w sobie 12 stóp kwadr.

Jeżeli tedy piérwſzé powiękſzénié ieſt na 56 ſtóp kw. drugié będzie dwa razy tylé, toieſt 112 ſtóp kw. i oprócz tego 12 ſtóp kw. a ze wſzyſtkiém 124 ſtóp kw. nié maiąc nawet względu na żadną długość piérwſzégo boku wyznaczoną w proſtokącie.

To ſamo rozumowanié przyſtóſować można we wſzyſtkich przykładach, gdzie liniiá CN, tylé razy zawiérá w ſobie liniią CG, ilé razy i liniiá AL, zawiérá w ſobie liniią AE.

Gdyby drugá różnica nie taká była daná, iaká bydź powinna podług powiękſzéń boków, i podług piérwſzégo powiękſzénia powiérzchni; tedy Zagádnienié byłoby do rozwiązania niepodobném, al'o co na iedno wychodzi, warunki znoſiłyby ſię iedén przez drugi.

Poſtępuiąc ſobie Algiebraicznie odkrylibyśmy podobnie to ſamo niewyznaczénié, czyli ſprzeciwieńſtwo, któregośmy przez rozumowanié doſzli.

Jakoż niech będzie piérwſzá długość x, a piérwſzá ſzérokość y. Doydziémy do naſtępuiących dwóch równáń.

$$\begin{cases} 3x + 2y + \ \ 6 = 56. \\ 6x + 4y + 24 = 124. \end{cases}$$

Weźmy połowę drugiégo równania, będzie . . $3x + 2y + 12 = 62$.
Odiąwſzy 6 po obu ſtronach, będzie . . . . . $3x + 2y + 6 = 56$.

Oſtatnié to równanié, na które przerobiliśmy 2gié równanié, nic ſię nie różni od piérwſzégo: a zatém dwa równania, ktoré ſkłádaią warunek, ſą w iſtocie té ſamé, i iednakowé zawſze zoſtaną między ſobą, iakążkolwiek byłaby ważność niewiadomych x i y. A gdyby drugá ſtrona drugiégo równania nie taká była iakąśmy ią wyznaczyli; tedy dwa równania maiącé piérwſzé dwie ſtrony równé, miałyby nierówné drugié dwie ſtrony.

Trzeba to ieſzcze wyłuſzczyć i na przykładach liczebnych.

Nie wiémy wymiarów iakiégo proſtokąta, wiémy tylko, że zmnieyſzywſzy 2 ſtopami ſzérokość iego, a powiękſzywſzy 2 ſtopami długość; powiérzchniá iego zmnieyſzy ſię 32 ſtopami kwadr: gdyby zaś ſzérokość zmnieyſzoná byłá 3 ſtopami, a długość powiękſzoná 4 ſtopami; tedy powiérzchniá zmnieyſzyłaby ſię 45 ſtop: kwadr:

Niech znowu będzie inny proſtokąt, który powiękſzony w długości na 4 ſtopy, a zmnieyſzony w ſzérokości na 5 ſtóp, mnieyſzą mieć będzie powiérzchnią 27 ſtóp kwadr: gdy zaś długość iego zmnieyſzy ſię na 5 ſtóp, a ſzérokość

kość powiękſzy na 4 ſtopy; powiérzchnią przez to będzie zmnieyſzoną 20 ſtopami kw.

Jako w poprzedzaiących Zagádniéniach dwie ilości niewiadomé zawiéraiących, do tego przez przerábianié równáń zmierzaliśmy, aby zagadniénié przywieśdź do iednéy niewiadoméy; tak i w innych Zagadniéniach, gdzie więcéy wchodzi niewiadomych, działania przerábiáń dzieią ſię końcém wyſadzénia z równáń co ráz po iednéy niewiadoméy, aż ſię nakoniec iedna tylko niewiadomá zoſtanie z wyrazami wáżność iéy okázuiącémi, a przez nię dochodzimy dopiéro wáżności innych niewiadomych.

101. *Zadanié 9. Mężczyzn 4, kobiét 3, i dzieci 2 wydało 38 Zł.*
5 Mężczyzn, 4 kobiét, i 3 dzieci, wydało . . . . . 50.
7 Mężczyzn, 5 kobiét, i 4 dzieci, wydało . . . . . 67.

Iléż wydał 1 mężczyzna, 1 kobiéta, i 1 dziécię?

Mianowanié. Wydátki 1 mężczyzny . . . . . . x.
. . . . . 1 kobiéty . . . . y.
. . . . . 1 dziécięcia . . . . . . z.

Warunek.
$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 38 & (A). \\ 5x + 4y + 3z = 50 & (B). \\ 7x + 5y + 4z = 67 & (C). \end{cases}$$

Przerábianié. W równaniach B, i A, zróbmy równémi ſpółczynniki niewiadoméy x.
$$\begin{cases} 20x + 16y + 12z = 200. \\ 20x + 15y + 10z = 190. \end{cases}$$

Odiąwſzy . . . $1y + 2z = 10$. (D).

W równaniach C, i A, zróbmy także równémi ſpółczynniki niewiadoméy x.
$$\begin{cases} 28x + 20y + 16z = 268. \\ 28x + 21y + 14z = 266. \end{cases}$$

Odiąwſzy . . . $-y + 2z = 2$. (E).

W równaniach D, i E, ſpółczynniki niewiadomych ſą równé iednę względém drugich, ale znaki iednéy z tych niewiadomych ſą odmiénné.
Odiąwſzy równanié E, od równania D, będzie . . . $2y = 8$.
$y = 4$.

Dodá-

Dodáwszy té dwa równania D, i E, będzie . . . . . $4z = 12$.
$1z = 3$.

W jedném ze trzech piérwszych równáń, *np.* w równaniu A, położywszy ważność znalezioną niewiadomych y, z, będzie

$$4x + 12 + 6 = 38.$$
czyli $4x + 18 = 38$.
więc $4x = 20$.
$1x = 5$.

Rozwiązanié. Wydátek 1 Mężczyzny . . . . 5. Zł.
1 Kobiéty . . . . . 4.
1 Dziécięcia . . . . . 3.

Spráwdz:
$$\begin{cases} 20 + 12 + 6 = 38. \\ 25 + 16 + 9 = 50. \\ 35 + 20 + 12 = 67. \end{cases}$$

Uwága. Gdyby za trzeci warunek podano było, że 7 mężczyzn, 6 kobiét, i 5 dzieci, wydało 74 Zł: tedy zagadniénié na pozór wyznaczoné byłoby w saméy rzeczy nie wyznaczoném: bo tén trzeci warunek byłby koniecznym wnioskiém ze dwóch piérwszych.

Jakoż w drugim razie więcéy iest 1 mężczyzną, 1 kobiétą, i 1 dziécięciém, niż w piérwszym: i dlá tego w drugim razie, więcéy się 12 Zł. wydaie niż w piérwszym.

A że w trzecim razie byłoby więcéy 2 mężczyznami, 2 kobiétami, i 2 dziećmi, więcéy niż w drugim; więc w tym trzecim razie wydátek byłby większy 24 Zł. niż w drugim: i gdyby tén wydátek nie był dany większy 24 złotémi niż drugi; tedy warunki Zagadniénia sprzeciwiałyby się iedné drugim.

Inszé przykłady. 20 Korcy pszenicy, 30 korcy żyta, i 12 korcy owsa, kosztowały . . . . 1164 *Zł.*

25 Korcy pszenicy, 36 korcy żyta, i 18 korcy owsa, kosztowały . . . . 1464.

32 Korcy pszenicy, 40 korcy żyta, i 24 korcy owsa, kosztowały . . . . 1776.

Iléż kosztowáł korzec pszenicy, żyta i owsa?

Mianowanié. Niech ceny korca pſzenicy, żyta i owſa będą x, y, z.

Warunek. $\begin{cases} 20x + 30y + 12z = 1164. \\ 25x + 36y + 18z = 1464. \\ 32x + 40y + 24z = 1776. \end{cases}$

Skróćenié. Podzielmy ſtrony piérwſzégo równania przez 2, a ſtrony trzeciégo równania przez 4.

$$\begin{cases} 10x + 15y + 6z = 582. & (A.) \\ 25x + 36y + 18z = 1464 & (B.) \\ 8x + 10y + 6z = 444 & (C.) \end{cases}$$

Przerábianié. Ponieważ ſpółczynniki niewiadoméy z, równé ſą w równaniach A, i C; więc odeymiéymy C, od A . . . . $2x + 5y = 138$ (D.)

Że znowu ſpołczynnik niewiadoméy z, w równaniu B, ieſt 3 razy tak wielki, iak ſpółczynnik téyże niewiadoméy w równaniu *np.* C; rozmnóżmy więc ſtrony równania C, przez 3 . . . . $24x + 30y + 18z = 1332$.

Odiąwſzy ſtrony tego oſtatniégo równania od ſtrón równania B, będzie . . . . $1x + 6y = 132$ (E.)

Trzy niewiadomé, i trzy równania, przywiedliśmy iuż do dwóch, toieſt $\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ 1x + 6y = 132. \end{cases}$

Podwóymy ſtrony 2go równania $\begin{cases} 2x + 5y = 138. \\ 2x + 12y = 264. \end{cases}$

Odeymiymy 1wſzé od 2go . . . . . $7y = 126$.

Podziélmy obie ſtrony przez 7 . . . . $1y = 18$.

Położywſzy ważność znalezioną niewiadoméy y, w równaniu E . . . . . . $1x + 108 = 132$.

więc $1x = 24$.

Położywſzy ważność niewiadomych x, i y, w równaniu *np.* A, będzie . . . . . . $240 + 270 + 6z = 582$.

czyli $510 + 6z = 582$.

więc . . . $6z = 72$.

a . . . . . . $1z = 12$

Rozwiązanié. Cena 1 korca pſzenicy . . . . . 24 Zł.

. . . 1 korca żyta . . . . . . 18.

. . . 1 korca owſa . . . . . . 12.

Sprawdz:

Spráwdz: $\left\{ \begin{array}{l} 480 + 540 + 144 = 1164. \\ 600 + 648 + 216 = 1464. \\ 768 + 720 + 288 = 1776. \end{array} \right.$

102. *Zadanié 10. Summa maiątku osoby A, i podwóynégo maiątku Osób B, i C, czyni . . . . 62. Zł.*

Summa maiątku B, i potróynégo maiątku A, i C, czyni . . . . 84.

Summa maiątku C, i poczwórnégo maiątku A, i B, czyni 102

Jakież są maiątki tych osób w szczególności?

Możnáby tu podobnym cale sposobém sobie postąpić, iak w ćwicżéniach poprzedzaiących, można iednak skrócić cokolwiek działanié w prowádzaiąc nową niewiadomą s, któráby wyrážała summę tych trzech maiątków, oznaczywszy maiątki té szczególnie brané, przez x, y, z.

Piérwszé równanié będzie . . $x + 2 (s - x)$ albo $2s - x = 62$.
Drugié . . . . $y + 3 (s - y)$ albo $3s - 2y = 84$.
Trzecié . . . . $z + 4 (s - z)$ albo $4s - 3z = 102$.

Rozmnóżmy 1wszé równanié, przez 6, drugié przez 3, trzecié przez 2, dlá zrównaniá spółczynników ilości niewiadomych: x, y, z.

Zrobią się té 3 równaniá $\left\{ \begin{array}{l} 12s - 6x = 372. \\ 9s - 6y = 252. \\ 8s - 6z = 204. \end{array} \right.$

Dodáymy strony tych 3 równań,
zrobi się następuiącé równanié: . . . $29s - 6x - 6y - 6z = 828$.
albo . . $29s - 6s$ . . . . . $= 828$.
toiest $23s$ . . . . . . $= 828$.
a . . . . $1s$ . . . . . . $= 36$.

Położywszy ważność znalezioną niewiadoméy s, w trzech powyższych równaniach, toiest: $2s - x = 62$. będzie $72 - x = 62$.
$3s - 2y = 84$ . . $108 - 2y = 84$.
$4s - 3z = 102$ . . $144 - 3z = 102$.
Więc $72 = 62 + 1x$ albo $72 = 62 + 1x$.
$108 = 84 + 2y$ . . . $54 = 42 + 1y$.
$144 = 102 + 3z$ . . . $48 = 34 + 1z$.

Więc nakoniec $x = 10.$
$y = 12.$
$z = 14.$

Sprawdz: $\begin{cases} 10 + 24 + 28 = 62. \\ 30 + 12 + 42 = 84. \\ 40 + 48 + 14 = 102. \end{cases}$

Inſzé przykłady.

Maiątek A, złączony z połową maiątków B, i C, czyni . . 50 Zł.
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{3}$ maiątków A, i C, czyni . . 36.
Maiątek C, złączony z $\frac{1}{4}$ maiątków A, i B, czyni . . 46.
Jakiéż ſą té maiątki w ſzczególności?

Summa maiątków A, i B, przenoſi 7 złotémi maiątek C.
Summa podwóyná maiątków A, i C, przenoſi 15 Zł. maiątek B.
Summa potróyná maiątków B, i C, przenoſi 21 Zł. maiątek A.
Jakiéż ſą té maiątki w ſzczególności?

103. *Zadanié 11. Maiątek A, złączony z $\frac{1}{2}$ maiątku B, czyni 25 Zł.*
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{3}$ maiątku C, czyni także . . . 25.
Maiątek C, złączony z $\frac{1}{4}$ maiątku A, czyni także . . . 25.
Jakiéż ſą té trzy maiątki w ſzczególności?

Mianowanié. Niech x, y, z, wyrażaią trzy naſtępnie maiątki: A, B, C.

Warunek. $\begin{cases} x + \frac{1}{2} y = 25. \\ y + \frac{1}{3} z = 25. \\ \frac{1}{4} x + z = 25. \end{cases}$

Przerábianié. Rozmnóżmy każdé z tych równáń, przez mianownika ułómka w nim ſię znayduiącégo, będzie:

$$\begin{cases} 2x + y = 50. \\ 3y + z = 75. \\ x + 4z = 100. \end{cases}$$

Podwóymy ſtrony 3go równania . . $2x + 8z = 200.$
Odeymiéymy ſtrony 1go równania . . $2x + y = 50.$

Zoſtanie . . . $8z - y = 150.$

Rozmnó-

Rozmnóżmy ftrony 2go równania przez 8 . . . $8z + 24y = 600.$
Odeymiéymy od tego równania poprzedzaiącé . . . . $25y = 450.$
Podziélmy to oftatnié równanié przez 25 . . . . . . $1y = 18.$

Położmy tę ważność niewiadoméy y, w 1wfzém, i 2giém równaniu przerobioném . . $2x + 18 = 50$, $54 + z = 75$ więc $2x = 32.$ $x = 16.$ $z = 21.$

Rozwiązanié. $x = 16.$
$y = 18.$
$z = 21.$

Infzé przykłady. Maiątek A, złączony z $\frac{1}{3}$ maiątku B, czyni 62 Zł.
Maiątek B, złączony z $\frac{1}{4}$ maiątku C, czyni . . . . . 62.
Maiątek C, złączony $\frac{2}{5}$ maiątku A, czyni . . . . . 62.

Maiątek A, przenofi połowę maiątku B . . . . . 11. Zł.
Maiątek B, przenofi trzecią część maiątku C . . . 11.
Maiątek C, przenofi piątą część maiątku A . . . . 11.

104. *Zadanié 12. Trzy Ofoby: A, B, C, dzielą między fiebie 10500 Zł. w naftępuiący fpofób:*

Jeżeli Ofoba A, bierze 2 Zł. B, powinna wziąźć 3. Jeżeli zaś B, bierze 4 Zł. C, powinna wziąźć 5.

Arytmetycznie. Jeżeli B, bierze 12 Zł. (toieft liczbę, którá tak przez 3 iak i przez 4 bydź może podzieloną;) tedy A, weźmie 8 Zł. a C, weźmie 15 Zł. razém zaś wfzyftkié té trzy ofoby wezmą 35 Zł. Że zaś 10500 Zł. podzielić maią między fiebie, toieft 300 razy 35 Zł: więc téż i części przypádaiącé ná A, B, C, będą 300 razy tak wielkié, iak były mniemané ich piérwfzé podziáły, toieft 8, 12, 15 Zł. a zatém będą 2400, 3600, i 4500 Zł.

Algiebraicznie. Mianowanié. Podziály ofób A, B, C.
. . . . . . $x, y, z.$

Warunek. $\begin{cases} x = \frac{2}{3}y. \\ y = \frac{4}{5}z. \\ x + y + z = 10500. \end{cases}$

Prze-

Przerab: Ponieważ $x = \frac{2}{3}y$.

$y = \frac{4}{5}z$.

więc $x = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}z = \frac{8}{15}z$.

a zatém $x + y + z = \frac{8}{15}z + \frac{4}{5}z + z = \frac{8}{15}z + \frac{12}{15}z + z =$
$\frac{8}{15}z + \frac{12}{15}z + \frac{15}{15}z = \frac{35}{15}z = \frac{7}{3}z$.

Że zaś ieſt $x + y + z = 10500$.
więc . . . . . $\frac{7}{3}z = 10500$.

$\frac{1}{3}z = 1500$.

$z = 4500$.

$y = \frac{4}{5}z = 3600$.

$x = \frac{2}{3}y = 2400$.

Inſzé przykłady. Trzy oſoby A, B, C, dzielą między ſiebie 70800 Zł.

Jeżeli A, bierze 3 Zł. tedy B, powinna wziąźć 4.
Jeżeli B, bierze 5 Zł. tedy C, powinna wziąźć 6.

Niech znowu ſumma do podziáłu będzie 3536.
Jeżeli A, bierze 5 Zł. B, weźmie 8.
Jeżeli B, weźmie 9 Zł. C, weźmie 13.

Sposób poſtępowania ténże ſám ieſt, chociáżby więcéy niż trzy było niewiadomych ilości. Staráć ſię zawſze należy, aby po iednéy co ráz zmnieyſzáć liczbę tych niewiadomych. Doſyć będzie na to dadź iedén lub dwa przykłady.

105. *Zadanié 13. Łokci 7 ſukna, 5 łokci kitáyki, 4 łokcie atłaſu, i 6 łokci płótna, koſztowało* . . . . 205 *Zł.*
8 Łokci ſukna, 9 kitáyki, 11 atłaſu, 7 płótna, koſzt: 322.
9 Łokci ſukna, 7 kitáyki, 8 atłaſu, 5 płótna, koſzt: 288.
11 Łokci ſukna, 8 kitáyki, 7 atłaſu, 6 płótna, koſzt: 320.

Mian: Cena łokcia ſukna x, kitáyki y, atłaſu z, płótna v.

Warunek.
$$\begin{cases} 7x + 5y + 4z + 6v = 205. \\ 8x + 9y + 11z + 7v = 322. \\ 9x + 7y + 8z + 5v = 288. \\ 11x + 8y + 7z + 6v = 320. \end{cases}$$

Prze-

Przerábianié. Chcąc się pozbydź niewiadoméy *np.* v, możnaby, porównywaiąc iedno z równáń z każdém ze trzech innych, uczynić równémi spółczynniki téyże niewiadoméy, które i bez tego iuż są równé, w 1wszém, i 4 równaniu. Możná iednak skrócić ieszcze to dziáłanié.

Odeymiéymy 1wszé równanié od 2go, zostanie $1x + 4y + 7z + 1v = 117.$
Rozmnóżmy to równanié przez 6 . . . . $6x + 24y + 42z + 6v = 702.$
Odeymiéymy od niego 1wszé równanié . . . $7x + 5y + 4z + 6v = 205.$
Zostanie . . . . $-1x + 19y + 38z = 497.$
Odeymiéymy 3cié równanié od 4go, zostanie: $2x + y - z + v = 32.$
Rozmnożmy przez 6 to równanié . . . . $12x + 6y - 6z + 6v = 192.$
Odeymiéymy to ostatnié równanié od 4go $11x + 8y + 7z + 6v = 320.$
Zostanie . . . . $-x + 2y + 13z = 128.$
Naostatek weźmy różnicę 1wszégo równania od 4go, będzie
$$4x + 3y + 3z = 115.$$

Przywiedliśmy iuż Zagadniénié do trzech tylko następuiących warunków.

$$\begin{cases} -1x + 19y + 38z = 497. \\ -1x + 2y + 13z = 128. \\ 4x + 3y + 3z = 115. \end{cases}$$

Odeymiéymy 2gié równanié od 1go, zostanie $17y + 25z = 369.$
Rozmnóżmy strony drugiégo równania przez 4, będzie
$$-4x + 8y + 52z = 512.$$
Dodáymy do tego równania 3cié $4x + 3y + 3z = 115.$
będzie $11y + 55z = 627.$

Zagadniénié przywiedliśmy do dwóch równáń $\begin{cases} 17y + 25z = 369. \\ 11y + 55z = 627. \end{cases}$

Podzielmy strony drugiégo z tych równáń przez 11, będzie . . . . $1y + 5z = 57.$
Rozmnóżmy to ostatnié równanié przez 5 . . $5y + 25z = 285.$
Odeymiéymy tak rozmożoné równanié od tego $17y + 25z = 369.$
Zostanie . . . . $12y = 84.$
więc . . . . $1y = 7.$

A że $1y + 5z = 57$; więc $7 + 5z = 57.$
a zatém $5z = 50$; a $z = 10.$
$4x + 3y + 3z = 115$; więc $4x + 21 + 30 = 115.$

 czyli

czyli $4x + 51 = 115$; a zatém $4x = 64$. a, $x = 16$.
$1x + 4y + 7z + v = 117$; więc $16 + 28 + 70 + v = 117$.
czyli $114 + v = 117$; a zatém . . . . $v = 3$.

Rozwiązanie $x = 16$. Cena łokcia sukna.
$y = 7$. Cena łokcia kitáyki.
$z = 10$. Cena łokcia atłasu.
$v = 3$. Cena łokcia płótna.

Sprawdz:
$112 + 35 + 40 + 18 = 205$.
$128 + 63 + 110 + 21 = 322$.
$144 + 49 + 80 + 15 = 288$.
$176 + 56 + 70 + 18 = 320$.

Insze przykłady. Maiątki osób cztérech A, B, C, D, są takie, iż

Summa maiątku A, z podwóyną summą trzech innych maiątków, czyni . . . . 61. Cz: Zł:

Summa maiątku B, z potróyną summą trzech innych maiątków czyni 2 razy 61, toiest . . . . 122.

Summa maiątku C, z poczwórną summą trzech innych maiątków czyni 3 razy 61, toiest . . . . 183.

Summa maiątku D, z wziętą pięć razy summą trzech innych maiątków, czyni 4 razy 61, toiest . . . . 244.

Jakież są té maiątki w szczególności?

Niech znowu maiątki osób 4 A, B, C, D, będą takie, iż

Dodáwszy maiątek A, do połowy summy innych trzech maiątków, uczyni to . . . . 37. Cz: Zł.

Dodáwszy maiątek B, do 3ciéy części summy innych my innych trzech maiątków, uczyni i to . . . . 37.

Podobnie maiątek C, dodany do czwártéy części summy innych 3 maiątków, uczyni . . . . 37.

Naostatek i maiątek D, dodany do 5téy części summy innych trzech maiątków, uczyni . . . . 37.

Maiątki osób 5, A, B, C, D, E, są takie, iż

Summa maiątku A, i połowy maiątku B, czyni . . . . 721 Zł.

Summa maiątku B, i 3ciéy części maiątku C, czyni . . . 721.

Summa

Summa maiątku C, i 4téy części maiątku D, czyni . . . 721.
Summa maiątku D, i $\frac{1}{5}$*téy części maiątku E, czyni.* . . . 721.
Summa maiątku E, i $\frac{1}{6}$*téy części maiątku A, czyni* . . . 721.

ROZDZIÁŁ IV.

Algiebra Ogólná.

106. Działania około ilości niewiadomych, albo około ich znaków w Algiebrze używané, pokázały nám iednę dopiéro różnicę zachodzącą w téy mierze między Arytmetyką i Algiebrą. Różni się ieſzcze Algiebra od Arytmetyki, i w ſpoſobie w którym wiadomé ilości oznáczá.

W piérwſzém Zagadniéniu Rozdziału I. naſtępuiącé Zadanié było nám do rozwiązania podané: *Ze dwóch oſób A, i B, piérwſzá má dwa razy tylé, ilé drugá: má zaś 12 Zł. więcéy niż drugá.*

Rozumowanié, któré czyniliśmy końcém rozwiązania tego Zadania, było to ſamo, któréby czynić należało za daną iakąkolwiek inną różnicą dwóch maiątków. Nié maiąc względu na żádną ſzczególną liczbę wyznaczoną za tę różnicę, moglibyśmy byli rozumować w ſpoſób naſtępuiący.

Nadmiarém maiątku téy oſoby maiętnieyſzéy, nad maiątek oſoby mniéy maiętnéy ieſt maiątek téyże ſaméy oſoby mniéy maiętnéy. Więc maiątek oſoby mniéy maiętnéy ieſt różnicą daną dwóch maiątków: a maiątek oſoby maiętnieyſzéy ieſt dwa razy tak wielki, iak ieſt różnica daná.

Jakążkolwiek tedy liczba wyznaczoná będzie za różnicę dwóch maiątków; natychmiáſt zadanié takowé rozwiążémy, pomniąc na to ogólné rozumowanié uczynioné nad wſzyſtkiémi różnicami, któréby wyznaczyć możná.

Aby wygodnie wyrazić ogólné rozwiązanié podobnych Zadáń, zgodzono ſię na oznaczénié różnicy danéy przez znak ogólny, na mieyſcé którégo możnáby potém w każdym przypádku ſzczególnym położyć ważność różnicy wyznaczonéy.

 Ozná-

Oznáczaiąc *np.* przez *d*, tę różnicę, iakążkolwiek ona będzie; poprzedzaiącé Zadanié możnáby bez wyszczególniénia tak wyrazić: *Znaléźć dwie liczby, z których iedna dwa razy iest tak wielká, iak drugá, a których różnica iest d.* Odpowiédź znaleziona przez poprzedzaiącé rozumowanié byłaby ta, że dwie ilości szukané są *d*, i *2d*.

Sposób postępowania wcale Algiebraiczny, używaiąc znaków niewiadomych tamżeby nás gdzie i piérwszy zaprowadził.

Mianowanié. Mnieyszá ilość . . . . x.
Większá ilość . . . . $x + d$ albo $2x$.

Warunek. $x + d = 2x$.

Przerábianié. $d = x$.

Rozwiązanié. $x = d$. Ilość mnieyszá.
$x + d = 2d$. Ilość większá.
$2x = 2d$. Drugié wyrażénié ilości większéy.

Gdyby iedna z szukanych ilości, miała bydź trzy razy tak wielká, iak drugá; tedy różnica byłaby 2 razy tak wielká, iak ilość mnieyszá: a zatém ilość mnieyszá byłaby połową różnicy danéy: a ilość większá zawiérałaby w sobie półtora razy tę różnicę.

Ponieważ zawsze oznáczámy różnicę daną przez *d*, więc mnieyszá ilość oznaczona tu będzie przez $\frac{1}{2}d$, a większá przez $\frac{3}{2}d$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyszá ilość . . x.
Większá . . . . . $x + d$, albo $3x$.

Warunek. $3x = x + d$.

Przerábianié. (Odiąwszy x po obu stronach) . . . $2x = d$.
(Podzieliwszy obié strony przez 2) . $1x = \frac{1}{2}d$.

Rozwiązanié. $1x = \frac{1}{2}d$. Ilość mnieyszá.
$x + d. = 1\frac{1}{2}d$. Ilość większá.
$3x = 1\frac{1}{2}d$. Drugié wyrażénié ilości większéy.

Jakążkolwiek liczbę razy zawiéráłaby w sobie zupełnie iedna ilość drugą; rozumowanié i sposób postępowania byłby tén sám co wyżéy. Zawsze tych

tych dwóch ilości różnicą byłaby mnieyſzá ilość wzięta ieden ráz mniéy, niżeli ſię zamyka w większéy ilości: a zatém wyrażéniém téy mnieyſzéy ilości byłaby różnica daná podzieloná przez liczbę mnieyſzą iednością, od téy, któráby okazywała, ilé razy większá ilość zawiérá w ſobie mnieyſzą.

Otóż znowu przywiedzéni ieſteśmy do oznaczénia tego nowégo ſtopnia ogólności przez wybranié iakiégo znaku do woli, *np.* m, któryby wyrážáł liczbę tylu razy, ilé iedna ilość zawiérá w ſobie drugą. Wyrażéniém zatém mnieyſzéy ilości będzie $\frac{d}{m-1}$ czyli różnica daná podzieloná przez liczbę iednością mnieyſzą od téy, która oznácza ilé razy większá ilość zawiérá w ſobie mnieyſzą: a większá będzie m, razy tylá, iak mnieyſzá, co ſię wyrážá naſtępuiącym ſpoſobém $\frac{md}{m-1}$: toieſt mnożąc przez m licznik ułómka, który oznácza ilość mnieyſzą.

Té wyrażénia $\frac{d}{m-1}$, i $\frac{md}{m-1}$, oznáczaią ieſzcze, iż ilość d, rozmnożoná ieſt przez ułómki $\frac{1}{m-1}$, i $\frac{m}{m-1}$: i przeto naſtępuiącym ſpoſobém zwykły ſię oznáczać dwie ilości.

Mnieyſzá ilość . . . . . . $\frac{1}{m-1}d$.

Większá ilość . . . . . . $\frac{m}{m-1}d$.

Przykłady. Niech będzie naprzód $m=3$, toieſt niech będzie iedna ilość trzy razy tak wielká, iak drugá.

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{3-1} = \tfrac{1}{2}.$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{3}{3-1} = \tfrac{3}{2} = 1\tfrac{1}{2}.$$

Będą więc ilości ſzukané $\frac{1}{2}d$, i, $1\frac{1}{2}d$, tak iak wyżéy.

Niech znowu będzie $m=4$.

$$\frac{1}{m-1} = \frac{1}{4-1} = \tfrac{1}{3}.$$

$$\frac{m}{m-1} = \frac{4}{4-1} = \tfrac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

Będą więc ilości ſzukané $\frac{1}{3}d$, i, $\frac{4}{3}d$, albo $1\frac{1}{3}$ d.

Trzeba przytoczyć więcéy ieſzcze innych przykładów, i naznaczyć różnicy d, różné ważności ſzczególné.

Spoſobém poſtępowania Algiebraicznym doſzlibyśmy tego ſamégo.

Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . . x.
Więkſzá . . . . . $x+d$, albo mx.

Warunek. $mx = x + d$.

Przeráb: (Odiąwſzy x po obu ſtronach) $mx - x = d$.

Piérwſzá ſtrona tego równania oznácza, iż wziąwſzy x razy m, trzeba od tak rozmnożonégo x, toieſt od mx, odiąć ráz x: albo co na iedno wychodzi, że x, bierze ſię razy $m - 1$. To zaś tak ſię inaczéy oznácza $(m-1)\,x$ (*).

Więc. $(m-1)x = d$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez $m-1$) $x = \dfrac{d}{m-1}$ albo $\dfrac{1}{m-1}\,d$.

Rozwiązanié. $x = \dfrac{1}{m-1}\,d$. Ważność mnieyſzéy ilości.

$mx = \dfrac{m}{m-1}\,d$. Ważność więkſzéy ilości.

$$x+d = \frac{1}{m-1}\,d + d, = d\left(\frac{1}{m-1} + 1.\right)$$

Wyráż-

(*) Gdyby ſię *nawias*, (parentheſis) opuścił, i tylko napiſało ſię $m - 1x$, toby oznáczało, że od ilości m, trzeba odiąć $1x$: przypádá zaś tu odiąć $1x$, od mx, a nie od m.

Wyráźmy iedność, czyli 1, nakſztált ułómku $\frac{m-1}{m-1}$.

będzie $x+d=d\left(\frac{1}{m-1}+\frac{m-1}{m-1}\right)$

Dodáymy té dwa ułómki, dodaiąc ich liczniki będzie . . . . .

$x+d=d\left(\frac{m}{m-1}\right)$ drugié wyrażénie ilości większéy.

Gdy większá ilość zawiérá w ſobie mnieyſzą nie zupełnie ale z ułómkiém; wtedy mianowniki ułómków wchodzących w wyrażénia ilości ſzukanych, ſą ſamé ilościami ułomkowémi, i té ułómki ułómków powinny bydź w każdym ſzczególnym razie przywiedzioné do ułómków próſtych.

Można iednak uchronić ſię tego działánia używaiąc ſpoſobu naſtępującégo.

Niechby *np.* iedna ilość zawiérała w ſobie drugą półtora razy, w takim razie większá ilość, miałaby w ſobie 3 takié części, iakich mnieyſzá miałaby tylko 2. Niechby iedna taká część ogólnie była oznączoná przez *a*, większá ilość mogłaby bydź ogólnie także oznaczoná przez *3a*, mnieyſzá przez *2a*: ponieważ *3a*, zawiérá w ſobie *2a*, półtora razy.

Podobnie iakiéżkolwiek byłoby wyrażénié ułómkowé, właściwie, albo niewłáściwie tak nazwané, któréby oznáczało, ilé razy iedna ilość zawiérá w ſobie drugą; można zawſze wyrazić wielkość tych ilości, iednéy względém drugiéy, albo ſtoſunek iednéy do drugiéy, przez liczby cálkowité.

Niech więc będzie Zadanié daleko ógólnieyſzé takié: *Znaléźć dwie ilości, któréby tak ſię do ſiebie miały, iak liczby cáłkowité* m, *i* n (m, *większá liczba* n., *mnieyſzá*,) *i których różnica ieſt* d.

Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . . nx.
Większá ilość . . . mx albo $nx+d$.

Warunek $mx=nx+d$.

Przerábianié. (Odiąwſzy nx po obu ſtronach) $mx-nx=d$.
(Rozłożywſzy piérwſzą ſtronę na dwa *Czynniki* (Factores,) z których ſię ſkładá $1x(m-n)=d$.

(Podzie-

(Podzieliwszy obié strony przez $m-n$) $x = \frac{1}{m-n}d$.

Rozwiązanié. $nx = \frac{n}{m-n}d$. Mnieyszá ilość.

$mx = \frac{m}{m-n}d$. Większá ilość.

$$nx + d = \frac{n}{m-n}d + d = d\left(\frac{n}{m-n}+1\right) = d\left(\frac{n}{m-n}+\frac{m-n}{m-n}\right)$$

$= d\left(\frac{m}{m-n}\right)$. Drugié wyrażénié większéy ilości. (*)

Przykłady. Złodziéy uciekaiący ubiégá 5 mil na dzién: pogón cztéry dni po ucieczce za nim wystaná ubiégá na dzién mil 7. Jakże prędko dogoni złodzieia?

Rozumo: Przy wysłaniu pogoni złodziéy przez 4 dni iuż uciekaiąc, ubiégł mil 20, i ta iest różnica początkowá drogi pogoni od drogi złodzieia.

Drogi przez pogóń, i przez złodzieia ubieżoné będą względém pogoni 7, a względém złodziéia 5 mil, tylé razy wziętych, ilé dni iest ich biegu. Więc $m = 7$.
$n = 5$.
$d = 20$.

Położywszy zamiást m, n, d, ważności ich szczególné, będzie

$x = \frac{1}{m-n} \times d = \frac{1}{2} \times 20 = 10$. Dni biegu pogoni.

$mx = \frac{m}{m-n} \times d = \frac{7}{2} \times 20 = 70$. Mile uiechané od pogoni w 10 dniach.

$nx = \frac{n}{m-n} \times d = \frac{5}{2} \times 20 = 50$. Mile ubieżoné od złodzieia od czasu wysłania pogoni.

Niech

(*) Gdyby się postrzegało, iż wprowadzénié więcéy niż iednégo znaku ogólnégo sprawuie trudność uczniόm, tedy Nauczyciel dłużéy się zabawi nad sa-

Niech znowu będzie

$m = 8.$	$m = 10.$	$m = 13.$	$m = 15.$
$n = 5.$	$n = 6.$	$n = 9.$	$n = 11.$ i t. d.
$d = 24.$	$d = 32.$	$d = 36.$	$d = 40.$

107. *Zadanié 2. Znaléźć dwie ilości których summa ieſt daná, i z których iedna podwóyná ieſt drugiéy.*

Rozumowanié. Ponieważ iedna z tych ilości podwóyná ieſt drugiéy; więc ich ſumma będzie potróyná ilości mnieyſzéy: a zatém mnieyſzá ilość będzie trzecią częścią téy ſummy, a większá będzie $\frac{2}{3}$ téyże ſummy. Przeto gdy ſummę daną oznaczymy przez $ſ$, mnieyſzá ilość oznaczy ſię przez $\frac{1}{3}ſ$, a większá przez $\frac{2}{3}ſ$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . . x.
Większá . . . . . $2x$.

Warunek. $1x + 2x = S.$

Przerábianié. $3x = S.$

$$1x = \frac{S}{3} = \frac{1}{3}S.$$

Rożwiązanié $x = \frac{1}{3}S.$ Mnieyſzá ilość.
$2x = \frac{2}{3}S.$ Większá ilość.

Spráwdzénié. $\frac{1}{3}S + \frac{2}{3}S = S.$

Toż ſamo rozumowanié, i ténże ſpoſób poſtępowania má mieyſcé, iakążkolwiek liczbę razy zawiérałyby iedna ilość drugą, gdy obudwóch ich ſumma ieſt daná.

Trzeba to piérwéy na wielu przykładach okázać, nim ſię przyſtąpi do ogólnych wyrażéń ſpółczynników.

W ogólności mówiąc:- niech będzie ſumma daná $ſ$, do podzielénia na dwie części, któréby ſię do ſiebie miały iak liczby dané m, i n.

T *Miano-*

mémi przypádkami, że ich tak nazwę, półogólnémi, w którychby ſpółczynniki ilości niewiadomych, były wyſzczególnioné przez liczby; a ſama tylko różnica, oznaczoná, ogólnie. Przez ćwiczénié ſię na zadaniach naſtępuiących nabiorą Uczniowie łatwości w obchodzéniu ſię w przypádkach tych mniéy ogólnych.

Mianowanié. Części ſzukané . . . mx, nx.

Warunek. $mx + nx = S$.

Przerábianié. $x(m+n) = S$, $x = \frac{S}{m+n} = \frac{1}{m+n} S$.

Rozwiązanié. $mx = \frac{m}{m+n} S$.

$nx = \frac{n}{m+n} S$. Części ſzukané.

Spráwdzénié. $\frac{m}{m+n} S + \frac{n}{m+n} S = S \left(\frac{m+n}{m+n} \right) = S$.

108. *Przykłady. Dwie oſoby w odległości 272 mil będącé iadą na przeciwko ſiebie. Jedna z nich uieżdżá na dzién mil 9, a drugá 7. Za iléż dni zjadą ſię z ſobą, i iak wielé mil każdá z nich uiedzie?*

Rozwiązanié. Mile od tych oſób uiechané przed ſpotkaniém ſię powinny zamykać w ſobie 9, i 7 mil tylé razy, ilé dni té oſoby iechały do ſiebie: więc

$x = \frac{1}{m+n} S = \frac{272}{9+7} = \frac{272}{16} = 17$. Dni iazdy.

$mx = \frac{m}{m+n} S = \frac{9 \times 272}{9+7} = \frac{2448}{16} = 153$. Milę od 1wſzéy oſoby uiechané.

$nx = \frac{n}{m+n} S = \frac{7 \times 272}{9+7} = \frac{1904}{16} = 119$. Mile od 2giéy oſoby uiechané.

Pewná oſoba kupiwſzy pewną liczbę łokci ſukna po 12 Zł. i tyléż łokci materyi po 7 Zł. zapłaciła za wſzyſtko 285 złotych.

Niech znowu będzie $m = 7$. $m = 8$.
$n = 5$. $n = 5$.
$S = 168$. $S = 195$.

Uwága.

Uwaga. Ostatnié Zagadnienié wychodzi na iedno, co reguła spółki w Arytmetyce. Rozwiązaliśmy ié Jeometrycznie na swoiém mieyscu (Jeom. Część I. § 221.) Rachunek poprzedzaiący możná do wykréślénia przystósować. Jakoż niechby trzeba podzielić liniią AB, na 2 części, któréby się tak do siebie miały, iak dwie liniie dané. Przez końce A, i B, linii AB, pociągniéymy po dwóch stronach téy linii, liniie AC, BD, równo-odległé od siebie, i równé względém liniy danych. Punkt X, w którym liniiá CD przeymie liniią AB, będzie punktém podziału szukanégo. Dlá przystósowania tego wykréślénia do rachunku poprowádźmy CE, równo-odległą od AB, tak daleko, aż spotká BD w E. Niech będzie $AB = a$. Fig. 22.

$AC = m.$ Więc $DE = AC + BD = m + n.$
$BD = n.$ $CE = a.$

Tróykąty DEC, DBX, są podobné: więc
$DE : DB = CE : BX.$

albo; $m+n : n = a : BX$, a zatém $BX = a \times \frac{n}{m+n}$.

Tróykąty: DEC, CAX, są także podobné: więc
$DE : AC = CE : AX$;

albo: $m+n : m = a : AX$; a zatém, $Ax = a \times \frac{m}{m+n}$.

Podobné przystósowanié uczynić możná, i do piérwszégo Zadania.

109. *Zadanié 3. Znaléźć dwie ilości, których dana iest summa i różnica.*

Rozumowanié. Jeżeli dlá otrzymania większéy ilości, dodaie się do połowy summy danéy ilość pewná; toć tę samę ilość odiąć trzeba od połowy summy, aby mieć ilość mnieyszą: więc różnica dwóch ilości szukanych, będzie dwa razy tak wielká, iak iest różnica iednéy z nich od połowy summy: a zatém większá ilość przewyższá połowę summy połową różnicy danéy, a mnieyszá ilość nie dochodzi połowy téy summy połową także różnicy danéy.

Niechby summa daná dwóch ilości była oznaczoná przez s, a różnica przez d; będzie ilość większá szukaná $= \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, a mnieyszá $= \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$.

Algiebraicznie. Mianowanié. Mnieyſzá ilość . . x.
Większá . . . . $x + d$.
Summa . . . . $2x + d$.

Warunek. $2x + d = s$.

Przerábianié. (Odiąwſzy d) . . . . $2x = s - d$.
(Podzieliwſzy przez 2) . $1x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$.

Rozwiązanié. $x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$. Mnieyſzá ilość.
$x + d = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d + d = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d + \frac{2}{2}d = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$.
Większá ilość.

Spráwdzénié. $\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s = s$.

Twiérdzénié. Ze dwóch ilości większá równá ſię zawſze połowie ich ſummy, i połowie różnicy: mnieyſzá zaś równá ſię połowie ſummy mniéy połową różnicy.

Jeſt to twiérdzénié wielkiéy wági, które nám iuż użyteczné było w Jeometryi (§. 342, 343, Części I.) a które i w ciągu tego dzieła wielé ſię przyda. Możná tu przypomnieć dowodzénié Jeometryczné, (§. 188, Części I.) i przyſtóſować ié do wielu liczebnych przykładów.

110. *Zadanié.* 4. *A, má 3 razy tylé, ilé B: gdy zaś zyſká tak A, iak i B, iednakową ſummę* a; *maiątek A, będzie 2 razy tylko tak wielki, iak maiątek B.*

Przez rozumowanié. Po zyſkanéy ſummie a przez B, aby maiątek A, był ieſzcze 3 razy tak wielki, iak maiątek B; trzeba było oſobie A, zyſkać $3a$. Ale że A, zyſkuie tylko a; więc nie doſtaie iéy $2a$, do tego, aby miała 3 razy tylé, ilé má B, po zyſku. Że zaś po tym zyſku z obu ſtrón A, má tylko dwa razy tylé, ilé B; więc nie doſtaie oſobie A, maiątku oſoby B, który má po zyſku, aby A, była i potym zyſku 3 razy tak maiętná iak B; więc maiątek B po zyſku, ieſt $2a$, a przed zyſkiém był a.

Algiebraicznie. 1wſzy maiątek B . . . . x.
1wſzy maiątek A . . . . $3x$.
2gi maiątek B . . . . . $x + a$.
2gi maiątek A . . . . . $3x + a$, albo $2x + 2a$.

Warunek. $3x + a = 2x + 2a$.

Prze-

Przerábianié. $1x + a = 2a$ $1x = a$.
Rozwiązanié $1x = a$. 1wszy maiątek B.
$3x = 3a$. 1wszy maiątek A.
$x + a = 2a$. 2gi maiątek B.
$3x + a = 4a$. 2gi maiątek A.
$2x + 2a = 4a$. Drugié wyrażénié tego 2go maiątku A.

Jakążkolwiek tedy będzie summa daná, którą tak A, iak i B zyskuie, wszelako piérwszy maiątek B, zawsze będzie równy téy summie, byleby warunki Zagadniénia též samé zostały. Choćby zaś i nieréwné były zyski, i osoba A, zyskała summę a, osoba zaś B, summę b; tedy sposób postępowania tak przez rozumowanié, iak i przez Algiebrę byłby prawie tén sám co wyżéy.

I tak, aby osoba A, miała zawszé 3 razy tylé, ilé B; trzebaby iéy zyskać $3b$, ale że zyskuie tylko a, (któré a, oznáczá summę mnieyszą niż $3b$;) więc nie dostaie iéy $3b - a$, do tego, aby miała 3 razy tylé, ilé B, po zysku. Że zaś brakuie iéy do tego w saméy rzeczy maiątku B, po zysku; więc maiątek B, po zysku iest $3b - a$.

1wszy maiątek B	. . .	$2b - a$.
1wszy maiątek A	. . .	$6b - 3a$.
2gi maiątek B	. . . .	$3b - a$.
2gi maiątek A	. . . .	$6b - 2a$.

Algiebraicznie.	1wszy maiątek B	. . .	x.
	1wszy maiątek A	. . .	$3x$.
	2gi maiątek B	. . . .	$x + b$.
	2gi maiątek A	. . . .	$3x + a$ albo $2x + 2b$.

Warunek. $3x + a = 2x + 2b$.
(Odiąwszy $2x$) $1x + a = 2b$.
(Odiąwszy a) $1x = 2b - a$. tak iak wyżéy.

Tymże samym sposobém postąpić sobie należy, iakiéżkolwiek byłyby liczby razy, którémi iedna z jlości szukanych zawiérałyby w sobie drugą, tak przed zyskiém iak i po zysku, co též na różnych przykładach okázać trzeba. Naostatek rozwiąże się ogólné zagadniénié, szukaiąc dwóch ilości, których wiadomy iest stosunek, i których powiększonych danémi ilościami, stosunek także iest wiadomy. Niech będą dwie ilości, z których naprzód iedna

dna zawiérá w ſobie drugą razy m: niech iedna z nich powiękſzá ſię ilością a, drugá zaś ilością b, i po tém powiękſzéniu piérwſzá niech zawiérá drugą, razy n.

Przez rozumowanié. Ponieważ 2gá ilość powiękſzá ſię ilością b, więc gdyby piérwſzá powiękſzyła ſię ilością mb; tedy i po powiękſzéniu zawiérałaby w ſobie ilość drugą razy m. Więc ieżeli $a = mb$, tedy n, będzie $= m$, i zagadnienié ieſt nie wyznaczoném. Jeżeli a mniéy wáży niż mb; tedy po powiękſzéniu obudwóch ilości brakuie 1wſzéy $\overline{mb - a}$ do tego, aby była m razy tak wielká, iak 2gá. Że zaś brakuie iéy także $m - n$ razy 2giéy ilości po iéy powiękſzéniu; więc 2gá ilość po ſwoiém powiękſzéniu wáży $\frac{mb - a}{m - n}$: przed powiękſzéniém zaś taż ilość wáżyła

$$\frac{mb - a}{m - n} - b = \frac{mb - a - mb + nb}{m - n} = \frac{nb - a}{m - n}.$$

1wſzá wáżność mnieyſzéy ilości . . . . $\frac{nb - a}{m - n}$.

1wſzá wáżność większéy ilości . . . . $\frac{mnb - ma}{m - n}$.

2gá wáżność mnieyſzéy ilości . . . . $\frac{mb - a}{m - n}$.

2gá wáżność większéy ilości . . . . $\frac{mnb - na}{m - n}$.

Jeżeli a więcéy wáży, niż mb; tedy po powiękſzéniu obudwóch ilości 1wſzá zawiérá w ſobie więcéy niż m, razy drugą: i do tego, aby ią zawiérała razy m, má nad to $\overline{a - mb}$: ale że też má nad to i drugą ilość po iéy powiękſzéniu wziętą razy $n - m$; więc 2gá ilość po ſwoiém powiękſzéniu wáży $\frac{a - mb}{n - m}$, przed powiękſzéniém zaś wáżyła $\frac{a - mb}{n - m} - b$

$$= \frac{a - nb}{n - m}.$$

Uwága.

Uwága. Dwa wyrażénia $\frac{nb - a}{m - n}$ i $\frac{a - nb}{n - m}$ ſą równé, gdy té ſamé w obudwóch wyrażéniach ſą ważności liter, *a*, *b*, *m*, *n*: co okázać można wielorako, *np.* ſtąd, że wyrazy 2go ułómku ſą té ſamé co i wyrazy 1go ułómku rozmnożoné przez tę ſamę ilość — 1. Dlá ſamégo więc tylko rozumowania przyſtało mieć wzgląd na wielkość *a*, względém wielkości *mb*.

Algiebr: Drugá ilość . . . x. 2gá ilość pomnożoná . . $x+b$.
1wſzá . . . . . mx. 1wſzá ilość pomnożoná $mx+a$.
albo . . . $nx+nb$.

Warunek. $mx + a = nx + nb$.

Przerábianié. (Odiąwſzy a) . . . $mx = nx + nb - a$.
(Odiąwſzy nx) . . . $mx - nx = nb - a$.
(Podzieliwſzy przez $m - n$) $x = \frac{nb - a}{m - n}$.

Rozwiąz: $x = \frac{nb - a}{m - n}$. 1wſzá ważność 2giéy ilości. (*)

$mx = \frac{mnb - am}{m - n}$. 1wſzá ważność 1wſzéy ilości.

$x + b = \frac{mb - a}{m - n}$. 2gá ważność 2giéy ilości.

$mx + a = \frac{mnb - na}{m - n}$. 2gá ważność 1wſzéy ilości.

Należy

(*) O trudoności następuiącéy nie trzeba wſpominać Uczniom, chyba że ią ſami wznieca.

Gdy $a = mb$, a zatém $m = n$ wtedy wyrażénié $\frac{nb - a}{m - n}$ odmiéniá ſię w naſtępuiącé: $\frac{nb - mb}{m - n} = b\left(\frac{n - m}{m - n}\right) = b \times \frac{0}{0}$. Ilość zaś ta $\frac{0}{0}$ może bydź

Należy przystósować té *Formy ogólné* (Formulæ generales) do wielu przykładów szczególnych.

Przykład. Niech będzie . . . . . $m = 4.$
$n = 3.$

$$x = 3b - a.$$
$$mx = 12b - 4a.$$
$$x + b = 4b - a.$$
$$mx + a = 12b - 3a.$$

Podadzą tu Nauczyciele do rozwiązania, i ſtakié Zagadniénia, w których iedna ilość powiększá się, a drugá zmnieyszá ilością daną, wyznaczywszy stosunki dwóch szukanych ilości, nim się odmiénią, i po ich odmianach.

III. *Zadanié 5. Maiątki trzech osób A, B, C, są takié: że*
Summa maiątków A, i B, iest . . . . $a.$
. . . . *A, i C,* . . . . $b.$
. . . . *B, i C,* . . . . $c.$
Jakiéż będą té maiątki w szczególności?

Arytmetycznie. Summa podwóyná maiątków A, B, C. iest . . . . $a+b+c.$

Summa poiedynczá tychże maiątków $\frac{a+b+c}{2}$

Maiątek A . . . . . $\frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}.$

. . . . . B . . . . . $\frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a-b+c}{2}.$

. . . . . C . . . . . $\frac{a+b+c}{2} - a = \frac{-a+b+c}{2}.$

Jeżeli

---

iakążkolwiek ilością skończoną. Bo dáymy iakikolwiek wieloráz, z tego licznika podzielonégo przez mianownika zawsze z rozmnożénia tego wielorazu przez mianownika o, wypadnie o. Więc równie z rachunku, iak i z rozumowania, okazuie się, iż zadanié będzie niewyznaczoné, gdy $m = n$. Co się iuż pokázało w rozumowaniu.

Jeżeli tedy od ſummy dwóch ilości, których częścią ieſt maiątek iednéy z tych 3. osób, odeymiémy ſummę daną maiątku dwóch innych osób; połowa reſzty okáże maiątek téyże osoby.

Algiebr: Mian:	Summa ſzukaná 3 osób . . .	x.
	Maiątek A	$x - c$.
	. . . . . B	$x - b$.
	. . . . . C	$x - a$.
	Summa 3 maiątków	$3x - a - b - c$

Warunek. $3x - a - b - c = x$.

Przerábianié. (Dodáwszy $a+b+c$) $3x = x + a + b + c$.
(Odiąwszy $1x$) . . . $2x = a + b + c$.
(Podzieliwszy przez 2) $1x = \dfrac{a+b+c}{2}$

Rozwiązanié. $x - c = \dfrac{a+b-c}{2}$. Maiątek A.

$x - b = \dfrac{a-b+c}{2}$. Maiątek B.

$x - a = \dfrac{-a+b+c}{2}$. Maiątek C.

Spráwdzénié. $\dfrac{a+b-c}{2} + \dfrac{a-b+c}{2} = a$.

$\dfrac{a+b-c}{2} + \dfrac{-a+b+c}{2} = b$.

$\dfrac{a-b+c}{2} + \dfrac{-a+b+c}{2} = c$.

Przykłád. $a = 20$.
$b = 16$.
$c = 14$.

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{20+16-14}{2} = \frac{22}{2} = 11.$$

$$\frac{a-b+c}{2} = \frac{20-16+14}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$$\frac{-a+b+c}{2} = \frac{-20+16+14}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Jakiż będzie maiątek każdéy ze 4 osób A, B, C, D, gdy summa maiątków A, B, C . . . . ieſt . . . a.
. . . . . A, B, . . D . . . . b.
. . . . . A, . . C, D . . . . c.
. . . . B, C, D . . . . d.

Arytmetycznie. Potróyná ſumma 4 maiątków ieſt $a+b+c+d$.

Summa poiedynczá tychże 4 maiątków . . . . . $\frac{a+b+c+d}{3}$.

Maiątek A . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - d = \frac{a+b+c-2d}{3}$.

. . . . . B . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - c = \frac{a+b-2c+d}{3}$.

. . . . . C . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - b = \frac{a-2b+c+d}{3}$.

. . . . . D . . . $\frac{a+b+c+d}{3} - a = \frac{-2a+b+c+d}{3}$.

Jeżeli tedy od ſummy trzech ilości, któréy częścią ieſt maiątek iednéy z tych 4 osób odeymiémy podwóyną ſummę daną maiątku trzech innych osób, i reſzty weźmiémy część trzecią; ta okáże maiątek téy osoby.

Sposób postępowania Algiebraicznégo ieſt także tén ſám co wyżéy.

Mianowanié. Summa ſzukaná 4 maiątków . . . . . x.
Maiątek A . . . . $x-d$.
. . . . . B . . . . $x-c$.
. . . . . C . . . . $x-b$.
. . . . . D . . . . $x-a$.

Summa

Summa 4 maiątków . . . . $4x - a - b - c - d.$
albo . . . . $4x - (a + b + c + d.)$

Warunek. $4x - (a + b + c + d) = x.$
Przerábianié. (Dodáwszy $a+b+c+d$) $4x = x + (a+b+c+d.)$
(Odiąwszy $1x$) . . . . . $3x = a+b+c+d.$

(Podzieliwszy przez 3) $1x = \frac{a+b+c+d}{3}.$

Ténże sám sposób iest postępowania, gdy więcéy ieszcze będzie ilości, których (oprócz iednéy z nich) dané są wszystkié summy.

112. *Zadanié 6. Maiątki cztérech osób: A, B, C, D, są takié, że*
A, i B, maią razém summę . . . *a.*
C, i D, maią razém summę . . . *b.*
A, má 2 razy tylé, ilé C.
D, má 3 razy tylé, ilé B.
Jakiéż są té maiątki w szczególności?

Przez rozumowanié. Niech liniiá AB, wystáwiá nám summę maiątków, A i B: a liniiá CD, niech wystawiá summę maiątków C, i D. Niech AX, wystáwiá maiątek szukany, A: BX, maiątek B: CY, maiątek C: DY, maiątek D. Fig. 23.

Gdyby AB, była dwa razy tak wielká, iak CD; tedy ponieważ maiątek A, dwa razy iest tak wielki, iak maiątek C; maiątek także B, byłby dwa razy tak wielki, iak maiątek D. Ale że maiątek B, iest mnieyszy niż maiątek D, dwa razy wzięty; więc AB, powinna bydź daná mnieyszá niżeli CD, dwa razy wzięta. Niech będzie AE, dwa razy tak wielká, iak CD, będzie téż EX, dwa razy tak wielká, iak DY. Aże DY, má bydź trzy razy tak wielká, iak BX; więc liniiá DY, dwa razy wzięta, będzie 6 razy tak wielká, iak BX: a zatém EX, sześć razy także zamyká w sobie liniią BX. EB, zaś będzie 5 razy tylá, ilá iest BX. A że $EB = 2b - a$, więc

$BX = \frac{2b - a}{5}.$

Maiątek B . . . . $\frac{2b - a}{5},$

. . . . . A . . . $a - \left(\frac{2b - a}{5}\right) = \frac{6a - 2b}{5}.$

 Maią-

Maiątek D . . . $\frac{6b-3a}{5}$.

. . . . . C . . $b-\left(\frac{6b-3a}{5}\right)=\frac{3a-b}{5}$.

Algiebr: Mian: Maiątek B . . . . . . x.
. . . . . A . . . . . $a-x$.
. . . . D . . . . . . $3x$.
. . . . C . . . . . $b-3x$.

Warunek. $a-x=2(b-3x.)$

Przerábianié. $a-x=2b-6x$.
(Dodáwszy $6x$) . . . . . $5x+a=2b$.
(Odiąwszy a) . . . . . . $5x=2b-a$.
(Podzieliwszy przez 5) . $1x=\frac{2b-a}{5}$. tak iak wyżéy.

Sposób postępowania nie odmiéni się, choćby odmiénné były dané stosunki: co na innych przykładach okázać należy, z przystosowaniém każdégo przypádku do liczb szczególnych.

Mało co także tén sposób odmiéni się, gdy dane będą różnice maiątków, albo iednych summa, a drugich różnica. (Obácz w Rozd:. I. Zadanié 21, 22, 23.)

Naostatek przystosowanié iest łatwé, i do innych przypádków, gdzieby więcéy iak 4 ilości wchodziło. (Obácz ieszcze i w téy mierze Rozdz: I. Zadanié 29.)

113. *Zadanié 7. Maiąc dané dwie ilości,* a, *i* b, *z których piérwszá bierze się za więcéy niż dwa razy tak wielką, iak drugá: iléż trzeba będzie dodádź iednéy, i drugiéy, aby piérwszą zrobić podwóyną drugiéy.*

Fig. 24. Niech linie AB, i CD, wystawuią nám ilości dané a, i b, z których a, więcéy niż dwa razy iest tak wielká, iak b. Weźmy na AB, linią AE, dwa razy tak wielką iak CD, i niech linie równé BX, DY, oznáczaią ilość, którą trzeba dodádź tak do AB, iak i do CD, aby mieć AX, dwa razy tak wielką, iak CY.

Ponie-

Ponieważ AX, powinna bydź dwa razy tak wielká, iak CY, a że iuż ieſt AE, dwa razy tak wielká, iak CD; więc EX, będzie dwa razy tak wielká, iak DY, albo BX: a zatém BX = EB.

A że $EB = a - 2b$, więc $BX = DY = a - 2b$.
$AX = a + (a - 2b) = 2a - 2b$.
$CY = b + (a - 2b) = a - b$.

Algiebr: Mian: Ilość ſzukáná dlá dodania . . . x.
Summy ſzukáné . . . $a + x$, i $b + x$.

Warunek. $a + x = 2b + 2x$.

Przerábianié. (Odiąwſzy x) $a = 2b + x$.
(Odiąwſzy $2b$) $1x = a - 2b$. tak iak wyżéy.

Tymżé ſpoſobém maiąc dané dwie ilości a, i b, wyznaczyé możná ilość trzecią, któráby tak do a, iak i do b, dodaná, uczyniła ſummę piérwſzą 3, 4, 5, i t. d. razy tak wielką iak drugá, a w ogólności mówiąc, któráby to ſprawiła, aby piérwſzá ſumma była do drugiéy w danym ſtoſunku.

Nie odmiénny ieſt i tén ſpoſób, którym rozwiązać możémy naſtępuiącé Zadanié.

Jakąż ilość odiąć potrzeba, od iednéy i od drugiéy ilości danéy, albo dodadź do iednéy, a odiąć od drugiéy, aby té dwie ilości miały ſię do ſiebie, iak 2 liczby dané?

114. *Zadanié 8. Pewná oſoba kupuie liczbę* n, *łokci ſukna, dwoiakiégo gatunku, lepſzégo łokieć po Zł.* a, *podleyſzégo zaś łokieć po Zł.* b. *Wydała ze wſzyſtkiém na ſukno ſummę* ſ.

Iléż łokci było w wyżſzéy, a ilé w niżſzéy cenie?

Arytmetycznie. Gdyby wſzyſtkié łokcie tego ſukna były po Zł. a, tedyby koſztowały Zł. an, a że tylko koſztowały $ſ$, więc mniéy w ſaméy rzeczy koſztowały Zł. $an - ſ$. Ta zaś różnica ſtąd pochodzi, że była kupioná pewná liczba łokci, tylko po Zł. b, toieſt taniéy łokieć złotémi $a - b$; a zatém ilé razy ta różnica $a - b$, ceny łokcia ſukna tańſzégo, od droższégo, znayduie ſię w różnicy $an - ſ$, ceny wſzyſtkich łokci ſukna tańſzégo, od drożſzégo; tylé téż łokci było ſukna tańſzégo. Podzieliwſzy więc $an - ſ$, przez $a - b$, doydziémy liczby łokci ſukna tańſzégo.

$\frac{an - s}{a - b}$. Liczba łokci sukna tańszégo.

$n - \left(\frac{an - s}{a - b}\right) = \frac{an - bn}{a - b} - \left(\frac{an - s}{a - b} = \frac{s - bn}{a - b}\right.$. Liczba łokci sukna droższégo.

Uwága. To Zadanié ogólniéy ieszcze wzięté, takby mogło bydź wyrażoné.

Podzielić liczbę daną n, *na dwie części, których rozmnożonych przez liczby dané* a, *i* b, *summa równałaby się liczbie danéy* s.

Toż Zadanié uważaiąc ié Jeometrycznie, wyszłoby na następuiącé:

Znaléźć dwie linije, których daná iest summa, i których wiémy summę prostokątów, przez dwie inné linije dané.

Fig. 25. Niech będzie AB, liniiá daná, którą tak podzielić trzeba w punkcie X, aby summa prostokątów ze dwóch części AX, BX, przez linije dané AC, BD, równała się wielkości danéy.

Wystáwmy sobie, iak gdyby zrobioné dwa prostokąty AXYC, BXZD, z części szukanych AX, BX, przez linije dané: i póciągniymy DZ, aż się spotká, z AC, w E.

Prostokąt ABDE, z całéy linii danéy AB, przez BD, iest wiadomy, więc prostokąt EZYC, który iest nadmiarém summy danéy dwóch prostokątów, nad prostokąt ABDE, będzie także wiadomy. Aże iedén bok iego CE, który iest różnicą dwóch liniy danych AC, BD, iest wiadomy; więc też i drugi bok EZ, albo AX wiadomy będzie.

Niech będzie iak wyżéy . . . . . . AB $= n$.
AC $= a$.
BD $= b$.
Summa daná powiérzchni 2 prostokątów . . . . s.

Będzie ABDE $= nb$.
a zatém EZYC $= s - nb$.
a że iest EC $= a - b$.

więc EZ, albo AX $= \frac{s - nb}{a - b}$.

$$BX = AB - AX = n - \left(\frac{ſ - nb}{a - b}\right) = \frac{an - ſ}{a - b}.$$

$$AXYC = \frac{ſ - nb}{a - b} \times a = \frac{aſ - anb}{a - b}.$$

$$BXZD = \frac{an - ſ}{a - b} \times b = \frac{abn - bſ}{a - b}.$$

$$AXYC + BXZD = \frac{aſ - anb}{a - b} + \frac{abn - bſ}{a - b} = \frac{aſ - bſ}{a - b} = ſ\left(\frac{a - b}{a - b}\right) = ſ.$$

Algiebraicznie. Mianowanié. Jedna część . . . . x.
Drugá część . . . $n - x$.

Piérwſzá część przez a rozmnożoná . . . ax.
Drugá część przez b rozmnożoná . . . $bn - bx$.

Warunek. $ax + bn - bx = S$.

Przeráb: (Odiąwſzy bn) . . . . $ax - bx = ſ - bn$.
albo . . . . $x(a - b) = ſ - bn$.

(Podzieliwſzy przez $a - b$) $x = \frac{ſ - bn}{a - b}$. tak iak wyżéy.

Możnáby tak ogólnie rózwiązać i Zadania 31 aż do 34go Rozdziału I. które na to wychodzą, aby znaleźć dwie liczby, których ſumma, albo różnica ieſt dáná, i których wiémy także ſummę, albo różnicę wieloczynów, przez liczby dané.

Trzeba będzie każdy przypádek, do przykładów liczebnych przyſtóſować.

115. *Zadanié 9. Jeſt proſtokąt, którégo długość dwa razy tak wielká, iak ſzérokość. Dodano liczbę ſtóp* m, *wiadomą do iego długości, a liczbę ſtóp* n *także wiadomą, do iego ſzérokości. Powiérzchniá proſtokąta powiękſzyła ſię przez to liczbą daną* p, *ſtóp kwadratowych.*

Niech będzie AXYZ proſtokąt, którégo długość AX, dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość AZ: gdy do boków iego dodámy liniie wiadomé BX, CZ, (m, i n) powiérzchniá powiękſzoná będzie liczbą daną p, ſtóp kwadratowych. Fig. 25.

Powię-

Powiększéniém téy powiérzchni ieſt Węgielniczka BXYZCDB, którą można rozłożyć na dwa proſtokąty BY, i FZ, maiącé za boki linii dané BX, CZ, i linie ſzukané XY, ZY, i na proſtokąt EDFY, którégo daná ieſt powiérzchniá *mn*. Więc i ſumma dwóch proſtokątów BY, i FZ, będzie daná, bo będzie $p - mn$.

Summa tych dwóch proſtokątów, równá ſię trzém proſtokątóm maiącym za bok ieden ſpólny ſzérokość XY, piérwſzégo proſtokąta, a z których dwa maią za drugi bok powiękſzénié CZ, albo *n* ſzérokości, trzeci zaś má za bok drugi powiękſzénié BX, albo *m*, długości, i powiérzchniá tych trzech proſtokątów, równałaby ſię powiérzchni iednégo proſtokąta, któryby miál za iedén bok ſzérokość XY, piérwſzégo proſtokąta, a za bok drugi ſummę z liniy BX, i dwa razy wziętéy CZ. Powiérzchniá tego proſtokąta, byłaby $p - mn$; a że iedén bok iego wiadomy, ieſt $m + 2n$, więc drugi iego bok XY, będzie $\frac{p - mn}{m + 2n}$.

Szérokość 1go proſtokąta . . . . $\frac{p - mn}{m + 2n}$.

Długość . . . . $\frac{2p - 2mn}{m + 2n}$

Powiérzchniá . . . . $\frac{2(pp - 2pmn + mmnn)}{mm + 4mn + 4nn}$.

Drugá ſzérokość . . . . . . $\frac{p - mn}{m + 2n} + n = \frac{p + 2nn}{m + 2n}$.

Drugá długość . . . . . . $\frac{2p - 2mn}{m + 2n} + m = \frac{2p + mm}{m + 2n}$.

Drugá powiérzchniá . . . . $\frac{2pp + pmm + 4pnn + 2mmnn}{mm + 4mn + 4nn}$

Różnica dwóch powiérzchni . . . $\frac{pmm + 4pmn + 4pnn}{mm + 4mn + 4nn} =$

$$p\left(\frac{mm + 4mn + 4nn}{mm + 4mn + 4nn}\right) = p.$$

Wzór

Wzór rozmnożeń poprzedzaiących:

$p + 2mn$ . . . . Mnożny.
$2p + mm$ . . . . Mnożnik.

$2pp + 4pmn$ . . . . . . Wieloczyn przez $2p$.
$pmm + 2mmmn$ . . . . Wieloczyn przez mm.

$2pp + 4pmn + pmm + 2mmmn$. Wieloczyn cáłkowity.

$p - mn$ . . . . Mnożny.
$p - mn$ . . . . Mnożnik.

$pp - pmn$. . . . . . . Wieloczyn przez p.
$- pmn + mmnn$ . . . . Wieloczyn przez $- mn$.

$pp - 2pmn + mmnn$ . . . Wieloczyn cáłkowity.
$2pp - 4pmn + 2mmnn$ . . . Wieloczyn $p - mn$, przez $2(p - mn)$

$2pp + 4pmn + pmm + 2mmmn$. *Odiemny*, (Minuendus.)
$2pp - 4pmn \qquad + 2mmnn$. *Odiemnik.* (Subtrahendus.)

$4pmn + 4pmn + pmm$.

albo . . . . $p(4mn + 4mn + mm.)$
albo nakoniec, ... $p(2n + m)^2$ . . . . Reſzta.

Algiebr: Mian: 1 wſzá ſzérokość . . . . x.
1 wſzá długość . . . . $2x$.
1 wſzá powiérzchniá . . . . $2xx$.

2gá ſzérokość . . . . . $x + n$. Mnożny.
2gá długość . . . . . . $2x + m$. Mnożnik.
$2xx + 2nx$. Wieloczyn przez $2x$.
$mx + mn$. Wieloczyn przez m.

2gá powiérzchniá . . $2xx + x(m + 2n) + mn$. Wieloczyn cáłkowity.

$x(m + 2n) + mn$. Różnica dwóch powiérzchni.

Warunek. $x(m + 2n) + mn = p$.

Przerábianié, (Odiąwszy mn) . . . . . . $x(m+2n)=p-mn$.

(Podzieliwszy przez $m+2n$) $x=\frac{p-mn}{m+2n}$. i wszá szérokość tak iak wyżéy.

Ténże sám iest sposób postępowania, iakiżkolwiek będzie stosunek dwóch boków 1go prostokąta: co na wielu przykładach okázać należy. Tymże prawie sposobém możnáby ogólnie rozwiązać Zadanié 37, i 38. Rozdziału I.

Przy tych Zadaniach podała się pora, do czyniénia mnożénia Algiebraicznégo przez znaki ogólné.

116. *Przykład 1. Znaléźć wyrażénié kwadratu summy dwóch ilości?*

$a+b$. Mnożny.
$a+b$. Mnożnik.

$aa+ab$. Wieloczyn przez a.
$ab+bb$. Wieloczyn przez b.

$aa+2ab+bb$. Kwadrát z $a+b$, który zawiérá w sobie kwadrát z a, i z b, i dwa razy wzięty wieloczyn iednéy z tych ilości przez drugą.

To podanié dowiodło się na swoiém mieyscu sposobém Jeometrycznym, i służyło za wstęp do sposobu wyciągniénia piérwiástku kwadratowégo. (§. 111. Części I. Jeom.)

117. *Przykład 2. Znaléźć kwadrát różnicy dwóch ilości?*

$a-b$. Mnożny.
$a-b$. Mnóżnik.

$aa-ab$. Wieloczyn przez a.
$-ab+bb$. Wieloczyn przez b.

$aa-2ab+bb$. Wieloczyn cáłkowity, czyli kwadrát z $a-b$.

Tego podania można także dowiéśdź Jeometrycznie.

Jakoż

Jakoż niech będą AB, BC, dwie liniie, których różnicą ieſt AC: zróbmy kwadrát ABDE, z AB, i weźmy AF, EI, BH, równé linii AC. Poprowádźmy FH, IC, któréby ſię przecięły w G; i na BC, wyſtáwmy kwadrát BCLM. Fig. 27.

Kwadrát ACGF, różnicy AC, równá ſię kwadratowi ABDE, mniéy węgielniczką BDEFGCB. albo, (dodáwſzy i odiąwſzy kwadrát BCLM) kwadrát ACGF, równá ſię kwadratowi ABDE, mniéy węgielniczką MLGFEDM, a więcéy kwadratém BCLM. Że zaś ta węgielniczka ſkłádá ſię ze dwóch proſtokątów równych MG, FD, które ſą proſtokątami z liniy AB, i BC; więc kwadrát różnicy AC, dwóch liniy AB, BC, równá ſię różnicy między ſummą kwadratów tychże liniy, i ich proſtokątém dwa razy wziętym.

118. *Przykłád 3. Znaléźć wyrażénié wieloczynu z ſummy dwóch ilości, przez ich różnicę?*

$a + b$. Summa dwóch ilości.
$a - b$. Różnica tychże ilości.

$aa + ab$. Wieloczyn przez a.
$- ab - bb$. Wieloczyn przez $-b$.

$aa - bb$. Wieloczyn cálkowity.

Wieloczyn ſummy dwóch ilości przez ich różnicę, równá ſię różnicy kwadratów, tychże ilości.

W figurze poprzedzaiącéy niech będą AB, i AC, dwie liniie, których różnica ieſt BC: i niech tych dwóch liniy będą kwadraty AD, AG; różnicą tych kwadratów ieſt węgielniczka BCGFEDB, która ſię równá ſummie proſtokątów BCID, EFGI, maiących też ſamę ſzérokość BC, toieſt różnicę dwóch liniy AB, AC, a ſummę długości tę ſamę, co ſumma liniy BD, (albo AB) i EI, (albo AC.)

Wnioſek. Niech będą AC, CD, dwie liniie, których ſumma ieſt AD, a których różnica BD, wyznaczoná będzie, biorąc BC równą AC. Proſtokąt z AD, przez BD, równá ſię różnicy kwadratów z AC, i z CD. Więc wzaiémnie uważaiąc liniie AD, BD, iak dwie ilości, których połową ſummy, ieſt AC, a połową różnicy ieſt CD; proſtokąt tych dwóch ilości, równá ſię różnicy kwadratów połowy ich ſummy, i połowy różnicy. Fig. 28.

119. *Przykłád 4. Gdy do kwadratu ſummy dwóch ilości, dodámy kwadrát ich różnicy, iakiéż będzie wyrażénié ſummy, z tego dodania wynikaiącéy?*

 $a+b$.

$a + b$ . . . Kwadrát $aa + 2ab + bb$.
$a - b$ . . . Kwadrát $aa - 2ab + bb$.

Summa kwadratów . . . . . $2aa + 2bb = 2(aa + bb.)$

Jeżeli tedy do kwadratu ſummy dwóch ilości, dodámy kwadrát ich różnicy; wypadnie ſumma zawiéraiącá w ſobie dwa razy ſummę kwadratów, tych dwóch ilości.

Fig. 29. *Jeometrycznie.* Niech będą AC, BC, dwie liniie, których ſumma ieſt AB, a których znaydziémy różnicę, wziąwſzy CD, równą AC.

Wyſtáwmy na linii AD, proſtopadłą CE, równą AC, albo CD, i poprowádźmy AE, DE. Niech ieſzcze będzie i BF, proſtopadła do AD, ſpotykaiącá w F, liniią DE. Pociągniymy AF, i FG, proſtopadłá do CE. Liniie BD, BF, ſą równé; więc kwadrát z AF, który ieſt równy ſummie kwadratów z AB, i z BF, będzie téż równy ſummie kwadratów z AB, i z BD. Ponieważ zaś kąt AED, ieſt proſty; więc kwadrát z AF, będzie także równy ſummie kwadratów, z AE, i z EF, a zatém ſumma kwadratów z AE, i z EF, równá ſię ſummie kwadratów, z AB, i z BD.

A że Tróykąty: ACE, EGF, ſą proſtokątné, i równoramiénné; więc kwadraty z AE, i z EF ſą, piérwſzy dwa razy tak wielki, iak kwadrát z AC, a drugi dwa razy tak wielki, iak kwadrát z FG, albo z BC.

Więc ſumma kwadratów z AB, i z BD, ieſt dwa razy tak wielká, iak ſumma kwadratów z AC, i z BC.

Wzaiémnie gdyby liniie AB, i BD były dané, tedy ſumma ich kwadratów byłaby dwa razy tak wielká, iak ſumma kwadratów połowy ich ſummy AC, i połowy ich różnicy BC.

A zatém aby przeciąć liniią AD, na dwie takié części, których ſumma kwadratów byłaby iak może bydź náymnieyſzá; trzeba ią przeciąć na dwie części równé.

120. *Przykłád 5. Gdy od kwadratu ſummy dwóch ilości odeymiémy kwadrát ich różnicy, iakáž będzie różnica tych kwadratów?*

$a + b$ . . . Kwadrát $aa + 2ab + bb$.
$a - b$ . . . Kwadrát $aa - 2ab + bb$.

Różnica . . . . $4ab$.

Jeżeli

Jeżeli tedy od kwadratu summy dwóch ilości, odeymiémy kwadrát ich różnicy; zostanie się wieloczyn tych dwóch ilości cztéry razy wzięty.

Jeometrycznie. Niech będą AB, BC, dwie liniie, których summa iest AC. Weźmy AD = BC, i wystáwmy kwadrát ACDE na linii AC: Fig. 30.
weźmy CF, DG, EH, równé linii BC, albo AD. Przez punkta F, i H, poprowádźmy rowno-odległé od AC, a przez punkta D, i G, poprowádźmy równo-odległé od AE, któréby spotkały piérwszé równo-odległé w punktach M, L, N, I.

Kwadrát ACDE, iest kwadratém summy liniy AB, BC, a kwadrát ILMN, iest kwadratém różnicy BD, tychże liniy. Różnica zaś tych dwóch kwadratów skłádá się ze cztérech prostokątów takich iak CDLF, których boki równé są liniióm AB, BC.

121. *Przykłád 6. Jakiż iest skłád sześcianu z summy dwóch ilości?*

Summa podaná . . . . $a+b$.
Kwadrát téy summy . . . $aa+2ab+bb$. Mnożny.
$a+b$ . . . . . Mnożnik.

$aaa+2aab+abb$. . . Wieloczyn przez a.
$aab+2abb+bbb$. Wieloczyn przez b.

$aaa+3aab+3abb+bbb$. Wieloczyn całkowity, albo sześciáń z $a+b$.

122. *Uwága.* Zamiást aaa, pisze się též a^3, i obadwa té wyrażénia znaczą, że a przez a, i znowu przez a, ciągło iest rozmnożoné, czyli że a, bierze się 3 razy za Czynnika. Liczba 3 má tu nazwisko *wykładnika.* Podobnie téż pisze się aa, albo a^2, dlá oznaczénia kwadratu z a, albo Wieloczyna z a, przez a: albo nakoniec (co na iedno wychodzi,) dlá oznaczénia, że a, dwa razy się bierze za Czynnika.

Podług tego, Sześcián z $a+b$, oznaczyłby się następuiącym sposobém:

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, któré to wyrażénié skłádá się z Sześcianu iedney ilości . . . (a^3.)
z potróynégo wieloczyna kwadratu téy ilości przez drugą ($3a^2b$.)
z potróynégo wieloczyna téyże ilości przez kwadrát drugiéy ($3ab^2$.)

 i z sze-

i z sześcianu drugiéy ilości (b^3.)

To podanié Jeometrycznie iuż wyłożyliśmy, i służyło nam do wyciągniénia piérwiástku Sześciannégo. (§. 35. Części II.)

123. *Przykłád 7. Jakiż iest skłád sześcianu, z różnicy dwóch ilości?*

Różnica podaná . . $a - b$
Kwadrát téy różnicy $aa - 2ab + bb$. Mnożny.
$a - b$ . . . . . Mnożnik.

$a^3 - 2a^2b + ab^2$. Wieloczyn przez a.
$- a^2b + 2ab^2 - b^3$. Wieloczyn przez $-b$.

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$. Wieloczyn cáłkowity, albo sześcián z $a-b$.

Tę regułę Algiebraiczną Sześcianu, wyłożyć słowy można podobnie iak wyżéy.

124. *Zadanié 10. Pewny oyciec zapisuie náystarszému dziécięciu summę* a, *i* $\frac{1}{6}$ *część reszty maiątku: drugiému zapisuie* $2a$, *i* $\frac{1}{6}$ *część reszty maiątku: trzeciému zapisuie* $3a$, *i* $\frac{1}{6}$ *część reszty maiątku. i t. d. Wszystkié iego dzieci równie były podzielone tym sposobém. Iléż ich było? ilé się każdému dostało? i iaki był cały maiątek oyca?*

Rozumowanié Arytmetyczné to samo tu przystósować można, którégo użyliśmy w 21 Zadaniu, Rozdz: II.

Jakoż naymłodszé dziécię nie weźmie żádnéy części drugiéy na swóy dział: bo gdyby ią wzięło; tedyby ieszcze coś z całégo oycowskiégo maiątku pozostało: nic zaś pozostać nie powinno. Więc na dział iego przypadnie summa a, tylé razy wziętá, ilé iest wszystkich dzieci.

Piérwszá część działu na przedostatnié dziécię przypádaiącá, będzie od działu dziécięcia ostatniégo mnieyszá ilością a: a że tylé mu się má dostać co i náymłodszému; więc drugá część działu iego będzie a.

A że ta drugá część iest $\frac{1}{6}$ częścią reszty maiątku, przed wzięciém téyże części; więc nim to przedostatnié dziécię wzięło $\frac{1}{6}$ część, zostáwało ieszcze $6a$: a zatém na dział náymłodszému dostało się $5a$.

Że zaś náymłodszé dziécię wzięło a tylé razy, ilé było dzieci; więc było ich 5. Jest tedy dział każdégo dziécięcia $5a$, a ważność maiątku oycowskiégo $25a$.

Maiątek

Maiątek oycowſki . . . . 25*a*.
1wſzá część náyſtarſzégo dziécięcia . . . . *a*.
Zoſtaie ſię máiątku . . . . 24*a*.
2gá część náyſtarſzégo . . . . 4*a*.

Cały dział náyſtarſzégo . . . . 5*a*.
Zoſtaie ſię . . . . . . 20*a*.
1wſzá część 2go dziécięcia . . . . 2*a*.
Zoſtaie ſię . . . . . . 18*a*.
2gá część tegoż . . . . 3*a*.

Cały dział . . . . 5*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 15*a*.
1wſzá część 3go . . . . 3*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 12*a*.
2gá część tegoż . . . . 2*a*.

Cały dział . . . . 5*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 10*a*.
1wſzá część 4go . . . . 4*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 6*a*.
2gá część tegoż . . . . 1*a*.

Cały dział . . . . 5*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 5*a*.
1wſzá część oſtatniégo . . . . 5*a*.
Zoſtaie ſię . . . . 0.
2gá część tegoż . . . . 0.

Cały dział . . . . 5*a*.

Algiebr: Mian: Maiątek oycowſki . . . . x.
1wſzá część działu náyſtarſzégo dziecięcia . . . . . a.
Zoſtaie ſię maiątku . . . $x - a$.
2gá część działu tegoż . . . . $\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}a$.

Dział náyſtarſzégo dziécięcia . . . . $\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}a$.
Zoſtaie ſię maiątku . . . $\frac{5}{6}x - \frac{5}{6}a$.
1wſzá część działu 2go dziécięcia . . . . 2a.
Zoſtaie ſię maiątku . . . $\frac{5}{6}x - \frac{17}{6}a$.

2gá

2gá część działu tegoż . . . . $\frac{5}{36}x - \frac{17}{36}a.$

Dział 2go dziécięcia . . . . $\frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a.$

Warunek. $\frac{1}{6}x + \frac{5}{6}a = \frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a.$

Przerábianié. (Przywiódłſzy ułómki do iednakowégo mianownika) $\frac{6}{36}x + \frac{30}{36}a = \frac{5}{36}x + \frac{55}{36}a.$

(Rozmnożywſzy przez 36) $6x + 30a = 5x + 55a.$

(Odiąwſzy $5x$) . . . . $1x + 30a = 55a.$

(Odiąwſzy $30a$) . . . . $1x = 25a.$

Zgádzá ſię to z rozwiązaniém, przez rozumowanié.

Tymże ſpoſobém możnáby ſobie poſtąpić, iakiżkolwiek byłby ułómek maiący iedność za licznika, a liczbę cáłkowitą za Mianownika, i ukazuiący część reſzty maiątku pozoſtałégo, przypádaiącą na drugą część działu każdégo dziecięcia. Niechby *np.* ta drugá część działu każdégo dziécięcia oznaczoná była ogólnie przez $\frac{1}{n}$ reſzty. Na náymłodſzé dziécię ta drugá część nie przypadnie, ale tylko weźmie tylé razy a, ilé ieſt dzieci.

Piérwſzá część przedoſtatniégo dziécięcia, zawiérać będzie tylé razy a, mniéy iedném a: przeto na drugą część témuż dziécięciu przypadnie a.

A że ta drugá część ieſt $\frac{1}{n}$ reſzty maiątku, przed wzięciém téyże części; więc ta reſzta maiątku przed wzięciém téy części była na, po wzięciu zaś zoſtanie a, wzięté razy $n-1$, albo $(n-1)a$, na dział náymłodſzégo dziécięcia.

Liczba dzieci . . . $n-1.$
Dział każdégo dziécięcia $(n-1)a.$
Maiątek oycowſki . . $(n-1)^2a.$
1wſzá część działu náyſtarſzégo dziécięcia . . . . $a.$
Zoſtaie ſię . . . $a(nn-2n.)$
2gá część działu tegoż . . . . $a(n-2).$

Dział tego dziécięcia . . . . $a(n-1.)$
Zoſtáie ſię maiątku $a(n-1)(n-2.)$
albo . . $a(nn-3n+2.)$

1wſzá

1wſzá część działu 2go dziécięcia . . . . $2a$.
Zoſtaie ſię maiątku . . . $a(nn-3n)$.
2gá część działu tegoż . . . . $a(n-3)$.

Dział tego dziécięcia . . . . $a(n-1)$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(n-1)(n-3)$.
albo $a(nn-4n+3)$.

1wſzá część działu 3go dziécięcia . . . . $3a$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(nn-4n)$.
2gá część działu tegoż . . . . $a(n-4)$.

Dział tego 3ciégo dziécięcia . . . . $a(n-1)$.
Zoſtaie ſię maiątku . . $a(n-1)(n-4)$.
albo $a(nn-5n+4)$. I t. d.

125. *Uwága ſtóſowná do właſności liczb kwadratowych, a z poprzedzaiącégo Zadania wypádaiącá.*

Liczbę kwadratową uwáżać możná, iako równą piérwiáſtkowi iéy wziętému tylé razy, ilé tén piérwiáſtek zawiérá w ſobie iedności, albo téż uwáżać ią możná, iako równą tylu párόm liczb, równym piérwiáſtkowi kwadratu, ilé tén piérwiáſtek má iedności. A w ſzczególności wſzyſtkié té páry uwáżać możná, iako złożoné ze dwóch wyrazów czyniących dwa *Ciągi* (Series,) z których iedén rośnie od 1, aż do ważności piérwiáſtku, przez różnicę równą iedności: drugi zaś zmnieyſzá ſię przez różnicę także równą iedności, zaczynaiąc od liczby mnieyſzéy iednością od piérwiáſtku, aż do zera. Takié będą náſtępuiącé Ciągi:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ n-3,\ n-2,\ n-1,\ n-0.$$
$$n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ n-5,\ \ldots\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

Ponieważ ze dwóch wyrazów ſkładaiących iednę párę wyráz iedén ieſt pod wyrazém drugim, a ſumma dwóch wyrazów każdéy takiéy páry ieſt n; gdy tedy i liczba pár będzie n, ſumma wſzyſtkich pár razém będzie nn.

Od téy ſummy odiąwſzy ſummę iakiéykolwiek liczby pár náſtępnych po ſobie (zaczynaiąc od 1wſzéy páry,) i oráz odiąwſzy piérwſzy wyráz páry náſtępuiącéy, a reſztę podzieliwſzy przez liczbę iednością większą od liczby pár wſzyſt-

wſzyſtkich, toieſt przez $n+1$; wieloráz będzie drugim wyrazém téy páry naſtępuiącéy.

Weźmy liczbę pár m, ſumma tych pár będzie mn; piérwſzy wyráz pary naſtępuiącéy będzie $m+1$. Odiąwſzy od ſummy pár wſzyſtkich nn tamtę ſummę mn, wráz z piérwſzym wyrazém páry naſtępuiącéy $m+1$, toieſt odiąwſzy $mn+m+1$ od nn; zoſtanie $nn-mn-m-1$, albo $(nn-1)-(mn+m,)$ albo $(n-1)(n+1)-m(n+1,)$ albo $(n+1)(n-m-1,)$ albo $(n+1)(n-(m+1.)$

Podzieliwſzy tę reſztę przez $n+1$; wieloráz będzie $n-(m+1,)$ a tén ieſt drugim wyrazém páry maiącéy za piérwſzy wyráz $m+1$.

126. *Zadanié 11. Znaléźć wzór ogólny do rozwiązania zagadnień ze dwiéma niewiadoméml.*

Niech będą dwa równania: $\begin{cases} mx+ny=a. \\ px+qy=b. \end{cases}$

Trzeba wyznaczyć niewiadomych x, y, wáżność w jlościach wiadomych a, b, m, n, p, q.

Rozmnożywſzy ſtrony piérwſzégo równania przez p, ſtrony zaś drugiégo przez m.

będzie $\begin{cases} mpx+npy=ap. \\ mpx+mqy=mb. \end{cases}$

Odiąwſzy; będzie $npy-mqy=ap-bm.$

albo $y(np-mq)=ap-mb.$

a zatém $y=\dfrac{ap-bm}{np-mq}.$

Rozmnożywſzy zaś ſtrony piérwſzégo równania przez q, a ſtrony drugiégo przez n.

będzie $\begin{cases} mqx+nqy=aq. \\ npx+nqy=bn. \end{cases}$

Odiąwſzy piérwſzé to równanié od drugiégo,

będzie $npx-mqx=bn-aq.$

albo $x(np-mq)=bn-aq.$

a zatém $x=\dfrac{bn-aq}{np-mq}.$

Sprawdz:

Sprawdzénié. $$mx = \frac{bmn - amq}{np - mq};$$

$$ny = \frac{anp - bmn.}{np - mq}.$$

$$mx + ny = \frac{anp - amq}{np - mq} = a\left(\frac{np - mq}{np - mq}\right) = a.$$

$$px = \frac{bnp - apq}{np - mq}.$$

$$qy = \frac{apq - bmq}{np - mq}.$$

$$px + qy = \frac{bnp - bmq}{np - mq} = b\left(\frac{np - mq}{np - mq}\right) = b.$$

Należy tén wzór przyſtóſować do wielu przykładów liczebnych.

Co ſię tycze Zagadnién ze trzéma, ze cztéréma i t. d. niewiadomemi, ponieważ wzory do ich rozwiązania ſą dłużſzé i zawilſzé, a przyſtóſowania rzádkié (*) doſyć będzie dadź tu iedén przykład pół ogólny.

127. *Zadanié 12. Znaléźć trzy ilości x, y, z, takié, aby piérwſzá złączoná z połową ſummy dwóch innych, czyniła* a, *aby drugá złączoná z trzecią częścią ſummy dwóch innych, czyniła* b, *i aby trzeciá, złączoná z czwártą częścią ſummy dwóch innych czyniła* c.

Wprowádźmy czwártą niewiadomą $ſ$, dlá wyrażénia ſummy niewiadoméy trzech ilości x, y, z. Wypadną trzy naſtępuiącé równania:

$$x + \tfrac{1}{2}(ſ - x) = a.$$
$$y + \tfrac{1}{3}(ſ - y) = b.$$
$$z + \tfrac{1}{4}(ſ - z) = c.$$

albo $$x + ſ = 2a.$$
$$2y + ſ = 3b.$$
$$3z + ſ = 4c.$$

 Roz-

(*) Obácz w téy mierze przydatek do początków, o liniiach krzywych w Xiędze Jmć P. CRAMERA dawniéy Profeſſora Matematyki w Genewie. Tytuł Xiążki *Introduction à l'Analyſe des Lignes Courbes.*

Rozmnożywszy strony piérwszégo równania przez 6, drugiégo przez 3, trzeciégo przez 2, będzie

$$6x + 6s = 12a.$$
$$6y + 3s = 9b.$$
$$6z + 2s = 8c.$$

Dodáwszy té trzy równania, będzie

$$6s + 11s = 12a + 9b + 8c.$$

albo

$$17s = 12a + 9b + 8c.$$

$$s = \frac{12a + 9b + 8c}{17}.$$

$$x = 2a - s = 2a - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{22a - 9b - 8c.}{17}$$

$$2y = 3b - s = 3b - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{-12a + 42b - 8c}{17.}$$

$$y = \frac{-6a + 21b - 4c}{17}.$$

$$3z = 4c - s = 4c - \left(\frac{12a + 9b + 8c}{17}\right) = \frac{-12a - 9b + 60c}{17.}$$

$$z = \frac{-4a - 3b + 20c}{17}.$$

Gdyby wszystkié ilości a, b, c, były równé, tedyby było

$$x = \tfrac{5}{17}\ a.$$
$$y = \tfrac{11}{17}\ a.$$
$$z = \tfrac{13}{17}\ a.$$

Przykłád. Niech będzie $a = 17.$

tedy $x = 5.$, $y = 11.$, $z = 13.$ } Co łatwo możémy sprawdzić.

ROZ-

ROZDZIAŁ V.

O Proporcyach Arytmetycznych i Jeometrycznych, ogólnie uwáżanych.

128. Gdy dwie ilości przyrównywámy iednę do drugiéy, chcąc wiedzieć ich różnicę; wtedy mówi ſię, iż ſię zatrudniámy około ich *ſtoſunku Arytmetycznégo.* Co z takiégo przyrównywania wypádá, toieſt różnica między témi dwiéma ilościami, nazywa ſię *Wykładnikiém* tego ſtoſunku.

I tak niech będą dwie ilości a, i b, dwomá do przyrównywania wyrázami: wyrażénié to $a-b$, albo $b-a$, będzie wykładnikiém ſtoſunku ich Arytmetycznégo, podług tego iak będzie a, większé czy mnieyſzé względém b.

W ſtoſunku Arytmetycznym wyráz który ſię piérwſzy piſze, nazywá ſię *Poprzednikiém*, drugi *Naſtępnikiém.*

Mówi ſię, iż dwa ſtoſunki Arytmetyczné ſą równé, gdy będą równé ich wykładniki. I tak maiąc dwie ilości a, i b, których różnica $a-b$, i dwie ilości c, i d, których różnica ieſt $c-d$: ieżeli $a-b=c-d$, tedy ſtoſunki Arytmetyczné a, do b, i c, do d, nazywaią ſię równémi: i o cztérech tych ilościach a, b, c, d, mówi ſię, że czynią *Proporcyą Arytmetyczną.*

129. *Twiérdzénié I. Gdy cztéry ilości czynią proporcyą Arytmetyczną, ſumma dwóch ſkraynych, równá ſię ſummie dwóch ſrzednich.*

Niech będzie $a-b=c-d$.
tedy $a+d=b+c$.

Dowodzénié. Ponieważ podług przypuſzczénia ieſt
$a-b=c-d$. więc dodáwſzy do obudwóch ſtrón
$b+d$. będzie
$a-b+b+d, =c-d+b+d$.
toieſt ſummy $a+d$, i $c+b$, będą równé.

130. *Twiérdzénié 2. Wzaiémnie, ieżeli summa dwóch iakich ilości równa się summie dwóch innych; tedy można wziąźć dwie piérwszé ilości za dwa skrayné, a dwie drugié ilości za dwa średnie wyrazy proporcyi Arytmetyczném.*

Niech będzie $a + d = b + c$.
tedy $a - b = c - d$.

Dowodzénié. Przez przypuszczénié, iest
$a + d = b + c$; więc odiąwszy $b + d$ od obudwóch stron będzie
$a + d - b - d = b + c - b - d$, toiest
resszty $a - b$, i $c - d$ będą równé: a zatem cztéry ilości . . . . a, b, c, d, czynić będą proporcyą Arytmetyczną.

131. *Wniosski.* Gdy cztéry iakié ilości czynią proporcyą Arytmetyczną; tedy można odmienić mieysce dwóm średnim, albo dwóm skraynym wyrazóm, albo téż położyć dwa średnié, na mieyscu dwóch skraynych, a dwa skrayné, na mieyscé dwóch średnich, a proporcyá wszelako zachowaná będzie: ponieważ przypuściwszy raz że summy dwie skraynych i średnich są równé; té iednostayné zawsze będą przy tych wszystkich odmianach.

W przypádku szczególnym, w którym dwa średnié wyrazy są równé, proporcyá nazywá się *ciągłą*, (continua) i summa dwóch skraynych równá iest w tym razie średniému dwa razy wziętému: średni zaś równy iest połowie summy dwóch skraynych. Nazwáwszy tedy przez s, połowę summy dwóch ilości, a przez d, różnicę każdéy z tych dwóch ilości od połowy summy; té trzy ilości $s + d, s, s - d$, czynić będą proporcyą Arytmetyczną ciągłą.

Maiąc dané trzy ilości proporcyi Arytmetyczné, znayduiémy czwártą, odiąwszy ilość piérwszą od summy dwóch średnich. Jakoż ieżeli iest $a - b = c - d$, tedy $a + d = b + c$: odiąwszy zaś a, po obu stronach, będzie $d = b + c - a$.

132. Gdy dwie ilości przyrównywámy iednę do drugiéy chcąc wiedzieć ilé razy iedna z nich zawiérá w sobie drugą; wtedy mówi się, iż się zatrudniámy około ich *stosunku Jeometrycznégo.* Co z takiégo przyrównywania wypádá, toiest Wieloráz z podzielénia iednéy z tych ilości przez drugą, nazywá się *Wykładnikiém* tego stosunku.

I tak przyrównywaiąc tym końcém do siebie dwie liczby 8, i 4, zatrudnialibyśmy się w saméy rzeczy stosunkiém Jeometrycznym. Liczba 2, z takowégo przyrównania wypádaiącá na wieloráz, zwałaby się *Wykładnikiém* tego stosunku.

Ze dwóch wyrazów, które tak przyrównywámy do siebie, piérwszy nazywá się *Poprzednikiém*, drugi *Następnikiém*.

Wykładnik tedy takiégo stosunku może bydź uwáżany, iak liczba *oddzielná*, (abstractus) toiest, iak liczba oznáczaiącá tylko, ilé razy dwie ilości, które przyrównywámy zawiéraią się iedna w drugiéy: tak właśnie, iak Wieloráz w dzieleniu, iest także liczbą oddziélną, gdy dwa wyrazy dzielénia, są ilościami iednakowégo gatunku.

Gdy Wykładniki dwóch stosunków są równé, wtedy mówi się, że té dwa stosunki są równé: iakiégożkolwiek zaś gatunku będą dwa wyrazy iednégo z tych stosunku; tedy dwa wyrazy drugiégo stosunku, mogą bydź, albo tego samégo, albo téż i innégo gatunku.

Możná iednak wystawić sobie i dwa iakiékolwiek wyrazy stosunku, iak liczby oddziélné, a to dzieląc każdy z tych dwóch wyrazów, na części równé sobie, i uwáżaiąc liczbę tych części,, zawiéraiących się w jednym i w drugim stosunku. I tak niechby dwa *np.* czasy zawiérały w sobie iedén 5 godzin, a drugi 7 godzin, té dwa czasy mieć się do siebie będą, iak dwie liczby 5 i 7, toiest stosunek tych dwóch czasów, ténże sám będzie, co i stosunek dwóch liczb 5 i 7.

Arytmetyka i Jeometryá podały wielé zdarzéń zatrudniania się równością stosunków dwóch Jeometrycznych, z których wyrazy iednégo były odmiennégo gatunku, od wyrazów drugiégo. Wykładać to samo teráz będziemy sposobém ogólnieyszym, przywodząc ilości wchodzić maiącé w działania, do wyrazów liczebnych, które przez ogòlné znaki nazwiémy.

Każdy stosunek Jeometryczny uwáżanym bydź może, iak ułómek, którégo Licznik iest poprzednikiém, a Mianownik następnikiém. Wielkość także ułómku, którą oznáczá wieloráz z piérwszégo wyrazu, przez drugi odpowiédá wielkości wykładnika.

Stąd wypádá, że możná rozmnożyć lub podzielić obadwa wyrazy stosunku, przez téż samę liczbę, a wykładnik iego, a zatém i wielkość przez to się nieodmiéni.

Gdy dwa stosunki Jeometryczné, są równé, wtedy mówi się, że ich wyrazy składaią *proporcyą Jeometryczną*; toiest mówi się, że piérwszy Poprzednik, tak się má do swégo Następnika, iak i drugi Poprzednik do swégo także Następnika.

I tak

I tak niechby a, i b, były wyrazy iednégo ſtoſunku, c, i d drugiégo, równégo piérwſzému: tedy równość tych dwóch ſtoſunków, czyli proporcyá Jeometryczná między témi 4ma wyrazami zachodzącá tak ſię oznaczy $a : b = c : d$.

133. *Twiérdzénié 1. W każdéy proporcyi Jeometrycznéy wieloczyn dwóch wyrazów ſkraynych, równá ſię wieloczynowi dwóch śrzédnich.*

Jeżeli . . . . $a : b = c : d$; tedy $ad = bc$.

Dowodzénié. Przez przypuſzczénié $a : b = c : d$.
A że téż ieſt . . $a : b = ad : bd$.
. . . . i . . $c : d = bc : bd$.
Więc . . . . $ad : bd = bc : bd$.

Że zaś dwa naſtępniki téy oſtatniéy proporcyi ſą równé; więc równé także będą, i dwa iéy Poprzedniki, toieſt $ad = bc$.

134. *Twiérdzénié 2. Wzaiemnie: ieżeli dwa Wieloczyny ſą równé: tedy wziąwſzy dwa Czynniki iednégo za ſkrayné, a dwa Czynniki drugiégo za śrzednié; cztéry té wyrazy tak ułożoné uczynią proporcyą Jeometryczną.*

Jeżeli . . . . $ad = bc$, tedy $a : b = c : d$.

Dowodzénié. Ponieważ . . . . $ad = bc$.
więc będzie $ad : bd = bc : bd$.
A że ieſt . . . . $ad : bd = a : b$.
. . . . i . . . . $bc : bd = c : d$.
więc . . . . . . $a : b = c : d$.

135. *Wnioſek 1.* Czwárty wyráz proporcyi Jeometrycznéy, maiąc dané trzy piérwſzé, znayduie ſię, dzieląc Wieloczyn dwóch śrzednich, przez wyráz piérwſzy: bo ponieważ z proporcyi $a:b=c:d$ wypádá $ad=bc$; więc podzieliwſzy obiedwie ſtrony przez a, będzie $d = \frac{bc}{a}$.

Na tym wnioſku zaſádzá ſię reguła trzech, wyłożoná w Arytmetyce przez ſzczególné nad każdym przypádkiém rozumowanié.

136. *Wnioſek 2.* Maiąc daną Proporcyą Jeometryczną, możná odmiénić mieyſce wyrazóm iéy śrzednim lub ſkraynym: albo téż położyć wyra-

zy

zy śrzednié, na mieyſcu ſkraynych, a ſkrayné na mieyſcu śrzednich, a proporcyá wſzelako będzie zachowaná: bo przy tych wſzyſtkich odmianach, wieloczyn z wyrazów ſkraynych, równy zawſze będzie wieloczynowi z wyrazów śrzednich tak, iak w piérwſzéy danéy proporcyi.

WZÓR TYCH ODMIAN.

Proporcyá daná . . .		$a : b = c : d.$
Proporcye z niéy wnieſioné.	1.	$a : c = b : d.$
	2.	$b : a = d : c.$
	3.	$b : d = a : c.$
	4.	$c : d = a : b.$
	5.	$c : a = d : b.$
	6.	$d : c = b : a.$
	7.	$d : b = c : a.$

137. *Twiérdzénié 3.* W każdéy proporcyi Jeometrycznéy można uczynić naſtępuiącé odmiany.

Summa albo różnica dwóch wyrazów 1wſzégo ſtoſunku, tak ſię má do Poprzednika lub do Naſtępnika tegoż ſtoſunku; iak ſumma, albo różnica dwóch wyrazów drugiégo ſtoſunku, do Poprzednika lub Naſtępnika tego drugiégo ſtoſunku.

1. Jeżeli $a : b = c : d.$

tedy 1. $a + b : b = c + d : d.$ Ta odmianá nazywá ſię: *przez dodanié* albo *ſkłádanié*, (addendo, *albo* componendo.)

Jakoż $a + b$, zawiérá w ſobie b, ráz więcéy, niżeli ſamo a, zawiérá w ſobie tož b: także $c + d$, zawiérá w ſobie d, ráz więcéy, niżeli ſamo c, zawiérá w ſobie tož d: toieſt, tak Wykładnik ſtoſunku $a + b$, do b, iak i wykładnik ſtoſunku $c + d$, do d, ieſt większy iednością od Wykładnika ſtoſunku a, do b, i od Wykładnika ſtoſunku c, do d. A że wykładniki ſtoſunków dwóch oſtatnich, ſą równé, podług przypuſzczénia; więc wykładniki ſtoſunków piérwſzych, będą równé: a zatém $a + b : b = c + d : d.$

2. $a - b : b = c - d : d.$ Ta odmiana nazywá ſię: przez *odeymowanié*, albo przez *dzielénié*, (ſubtrahendo, *albo* dividendo.)

Rozumowanié ieſt to ſamo, co wyżéy, ztą tylko rożnicą, że Wykładniki ſtoſunków $a - b$, do b i $c - d$, do d, ſą obadwa mnieyſzé iednością od wykładników ſtoſunków, a, do b, i c, do d, które to wykładniki wzięté ſą za równé.

3. $a + b : a = c + d : c$.

Dowodzénié. Ponieważ $a : b = c : d$; więc téż będzie (§. 136 odmiana 2) $b : a = d : c$.

a zatém (podług 1.) $b + a : a = d + c : c$.

4. $a - b : a = c - d : c$. Dowodzénié ieſt to ſamo, iak 3. podług 2.

5. $a + c : b + d = a : b$.

Dowodz: Ponieważ $a : b = c : d$.
więc téż $a : c = b : d$.
a zatém $a + c : a = b + d : b$.
albo $a + c : b + d = a : b$.

6. $a - c : b - d = a : b$. Dowodzénié to ſamo prawie co wyżéy.

138. *Uwága.* Piąté z tych podáń rozciągnąć możná do iakiéykolwiek liczby ſtoſunków Jeometrycznych równych: toieſt maiąc iakąkolwiek liczbę tychże ſtoſunków równych, zawſze ſumma wſzyſtkich Poprzedników, tak ſię mieć będzie do ſummy wſzyſtkich Naſtępników; iak poprzednik iedén którégokolwiek z tych ſtoſunku, do ſwégo naſtępnika.

Jakoż niech będzie q, Wykładnik iednégo z tych ſtoſunku, będzie téż i każdégo innégo ſtoſunku równégo piérwſzému Wykładnikiém także q: a zatém ieżeli naſtępniki tych ſtoſunków ſą, a, b, c, d, e, f, i t. d. poprzedniki ich będą, aq, bq, cq, dq, eq, fq, i t. d.

Summa wſzyſtkich poprzedników będzie $aq + bq + cq + dq + eq + fq$ i t. d. toieſt q $(a + b + c + d + e + f$, i t. d.) a zatém wykładnik ſtoſunku ſummy wſzyſtkich poprzedników, do ſummy wſzyſtkich naſtępników będzie q, toieſt tén ſám, który ieſt wykładnikiém ſtoſunku, którégokolwiek z poprzedników poiedynczo wziętych do iego naſtępnika.

139. *Twiérdzénié 4. Niech będą dwie proporcye Jeometryczné.*

$a : b = c : d$.
$e : f = g : h$.

Wyrazy ich odpowiedaiącé ſobie rozmnożywſzy iedné przez drugié, Wieloczyny ae, bf, eg, dh, *będą także w proporcyi.*

Dowodzénié. Ułómki $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, któré ſą wykładnikami dwóch

ſtoſun-

ſtoſunków czyniących piérwſzą proporcyą ſą równé: dwa także ułómki $\frac{e}{f}$ i $\frac{g}{h}$, które ſą wykładnikami ſtoſunków czyniących drugą proporcyą, ſą równé: będzie tedy

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$$\frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$$

Więc Wieloczyn ułómków, które ſą piérwſzémi ſtronami tych dwóch równáń będzie równy Wieloczynowi ułómków, które ſą drugiémi ſtronami tychże równáń: toieſt $\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}$, a ułożywſzy to równanié w proporcyą, będzie $ae : bf = cg : dh$.

140. Wyrazy téy oſtatniéy proporcyi ſą wyprowadzoné z Wieloczynów, wykładników należących do ſtoſunków dwóch piérwſzych proporcyy: i przez to, wykładniki ſtoſunków, z których ſię ſkłádá ta oſtatniá proporcyá, nazywaią ſię ſkłádanémi z ſtoſunków dwóch piérwſzych proporcyy. (Obácz w Jeometryi Części I. na karcie 217, i naſtępuiących, to, co ſię tam mówiło o ſtoſunkach ſkłádanych w tym razie, gdy wyrazy ſtoſunków maiących ſię ſkłádać, nie ſą ilościami liczebnémi, w którychby można oznaczyć, albo wykonać mnożénié.).

141. Podobnie dowiéśdźby można, że maiąc trzy, cztéry, pięć i t. d. proporcyy, a wyrazy ich odpowiedaiącé ſobie, iedné przez drugié ciągło rozmnożywſzy; Wieloczyny, które z takiégo rozmnożénia wypadną, będą także w proporcyi: przeto ſtoſunek ſkłádany, ze wſzyſtkich piérwſzych ſtoſunków, każdéy w ſzczególności proporcyi, równy będzie ſtoſunkowi ſkłádanému z drugich ſtoſunków téyże proporcyi: a zatém iakáżkolwiek byłaby liczba ſtoſunków równych, po dwa branych, zawſze ſtoſunki z nich ſkłádané będą równé.

142. Náywiękſzéy wági dlá wielu użytecznych przyſtóſowáń, ieſt tén przypádek, w którym wſzyſtkié do ſkłádania ſtoſunki ſą równé. W takim razie, ieżeli ſtoſunków liczba ieſt 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. Stoſunek z nich ſkłá-

ſkłádany, nazywá ſię dwumnożnym, tróymnożnym, czwórmnożnym, pięciomnożnym, ſześciomnożnym, i t. d. iednégo z tych ſtoſunku. A ieżeli nie tylko ſą równé té do ſkłádania ſtoſunki, ale nad to, ieżeli wſzyſtkié ich wyrazy ſą iednakowé; tedy wyrazy ſtoſunku ſkłádanégo będą té ſamé, co i ſtoſunki iednégo z ſkłádaiących, wziętégo 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. razy za Czynnika.

143. To, co wypádá z rozmnożénia iakiéy liczby wziętéy kilka lub więcéy razy za Czynnika, nazywać można *Mnogością* téy liczby. (Po Łacinie nazywá ſię to *Dignitas*, albo *Potentia*.) I tak zrobi ſię 2gá, 3ciá, 4tá, 5tá, 6, . . . *n*ta *Mnogość* liczby, podług tego jak będzie wziętá czy 2 razy, czy 3, 4, 5, 6, . . . czy ógólnie *n*, razy za czynnika. Ilości tedy naſtępuiącé *aa*, *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, *aaaaaa*, i t. d. ſą 2gą, 3cią, 4tą, 5tą, 6tą, i t. d. Mnogością liczby *a*. Dlá ſkrócénia zaś tak ſię piſzą a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, i t. d. Liczby 2, 3, 4, 5, 6, i t. d. w górze napiſané, oznáczaią liczbę tylu razy, ilé razy wzięło ſię *a*, za Czynnika. Nazywaią ſię té liczby Wykładnikami. W ogólności mówiąc, wyrażénié to a^n oznácza, iż trzeba wziąść *a*, razy *n*, za Czynnika, i nazywá ſię Mnogością *n*tą ilości *a*.

Stoſunek więc, który zachodzi między témiż ſamémi Mnogościami dwóch liczb, ſkłádá ſię z tylu ſtoſunków równych ſtoſunkowi tych dwóch liczb, ilé wykładnik tych Mnogości zawiérá w ſobie iedności. I tak ſtoſunek a^2, do b^2, ſkłádá ſię ze dwóch ſtoſunków, równych ſtoſunkowi *a*, do *b*. Stoſunek a^3, do b^3, ſkłádá ſię ze trzech ſtoſunków równych ſtoſunkowi *a*, do *b*: a w ogólności ſtoſunek a^n, do b^n, ſkłádá ſię z *n* ſtoſunków równych ſtoſunkowi *a*, do *b*.

144. Cokolwiek tu dotąd ſię mówiło, wſzyſtko to było w tém mniemaniu, że dwa iednégo ſtoſunku wyrazy miały ſpólną miarę, tak dalece, że ſtoſunek tych dwóch wyrazów mógł bydź oznaczonym przez liczby: a zatém że i wſzyſtkié inſzé ſtoſunki równé tamtému mogły także bydź przez liczby wyrażoné, i że wykładnikami tych ſtoſunków były liczby ſpółmierné, i równé. Jednakże widzieliśmy w Jeometryi częſté przykłady ilości nieſpółmiernych: wyciąganié piérwiáſtków kwadratowych i ſześciennych, podáwało nám wielé takich ilości, których ſtoſunek nié mógł bydź przez liczby wyrażony. Aleśmy téż oráz widzieli, że wſzyſtkié podania względém proporcyonalności, między ilościami ſpółmiernémi były równie prawdziwé i w przypádku

pádku nieſpółmierności: *np.* że té Równoległo-boki i té Graniaſto-ſłupy, które iednakowé maią podſtawy, były względém ſiebie iak ich wyſokości, gdy té wyſokości były ſpółmierné; ale oráz té Równoległo-boki, i té Graniaſtoſłupy były także w tym ſamym do ſiebie ſtoſunku, gdy ich wyſokości były nieſpółmierné. Dowiódłſzy, iż Tróykąty równokątné miały boki względém ſiebie proporcyonalné, gdy dwa ich boki odpowiedaiącé ſobie były ſpółmiernémi; pokázaliśmy oráz, że taż proporcyonalność była i wtedy zachowaná, gdy dwa ich boki odpowiedaiącé ſobie były nieſpółmiernémi. i t. d.

Spoſób dowodzénia tych podáń, móże bydź ogólnie przyſtoſowanym, do proporcyonalności iakichkolwiek ilości nieſpółmiernych, gdy tylko ta proporcyonalność znayduie ſię w jlościach ſpółmiernych. I tak, ponieważ mieyſca od ciáł przebieżoné z jednakową prędkością, maią ſię do ſiebie, iak czaſy przez które biegną té ciała, gdy czaſy ſą ſpółmierné; więc téż i mieyſca té będą do ſiebie iak té czaſy, chociążby czaſy były nieſpółmierné. Aby to ieſzcze tém widoczniéy okázać, można powtórzyć niektóré przykłady, iuż w piérwſzéy części Jeometryi wyłożoné.

I tak gdy podſtawy dwóch proſtokątów, iednakową maiących wyſokość ſą ſpółmierné, a podzielimy ié na iakąkolwiek liczbę części ſobie równych, których iedna podſtawa zawiérać będzie liczbę *m*, a drugá liczbę *n*, powiérzchnie téż tych proſtokątów będą mogły bydź podzieloné, na liczbę *m*, i *n*, części ſobie równych: i iako ſtoſunek dwoch podſtáw tych proſtokątów ieſt ténże ſám, co i liczb ſpółmiernych *m*, i *n*; tak téż ſtoſunek ich powiérzchni będzie ténże ſám, co tych dwóch liczb *m*, i *n*.

Jeżeli zaś podſtawy ſą nieſpółmierné, i iedna z nich, a zatém i Proſtokąt, do którégo należy dzieli ſię na iakążkolwiek liczbę *m*, części równych; tedy gdy drugá podſtawa, więcéy niż *n*, takich części, a mniéy, niż $n+1$ zawiérać będzie; powiérzchniá téż 2go proſtokąta, zawiérá więcéy niż *n*, a mniéy niż $n+1$, takich części, na iakié podzieloná była powiérzchniá piérwſzégo proſtokąta. I kiedykolwiek cztéry ilości ſą takié, że ſtoſunek piérwſzéy do drugiéy, równá ſię ſtoſunkowi trzeciéy, do czwártéy, gdy pierwſzá z drugą, a zatém i trzeciá z czwártą, ſą ſpółmierné; iakáżkolwiek byłaby liczba ſpółmierná, wyrážaiącá ſtoſunek dwóch piérwſzych, tedy i w tym razie, gdzieby dwie piérwſzé ilości były nieſpółmierné, można przybliżyć do práwdziwégo, wyrażénié ſtoſunków: tak dalece, że, oznáczywſzy poprzednika piérwſzégo ſtoſunku przez liczbę iaką całkowitą, liczba, któraby oznáczała prawdziwégo iego Naſtępnika, zawiérałaby ſię, między dwiéma liczbami różniącémi ſię od ſiebie iednością: a podzieliwſzy poprzednika drugiégo ſtoſunku,

na części równé, których liczba równałaby się liczbie części piérwszégo poprzednika, następnik także tego drugiégo stosunku, oznáczyłby się przez liczbę zawartą między témi samémi dwiéma liczbami, między którémi zawiérała się liczba części, na które podzielony był 1wszy Następnik.

145. *Twiérdzénié. Niech będą cztéry ilości A, B, C, D, z których A, B, są niespółmierné, i C, D, także niespółmierné.*

Podzielmy A, na iakąkolwiek liczbę *m*, części równych, z których każdá niech będzie *a*.

Podzielmy także i C, na tęż samę liczbę *m*, części równych, z których każdá niech będzie *c*.

Niech B, zawiérá więcéy niż *n*, a mniéy niż *n+1* takich części iaką iest *a*: niech D, zawiérá także więcéy niż *n*, mniey zaś niż *n+1* takich części iaką iest *c*: i niech się to zawsze práwdzi, iakiéżkolwiek liczby znaczyć będą litery *m*, i *n*.

Té cztéry ilości A, B, C, D, będą Jeometrycznie proporcyonalné.

Gdyby między témi cztéréma ilościami nie zachodziła proporcyá Jeometryczná; tedyby ieden z tych stosunków A, do B, albo C, do D, był większy od drugiégo: a zatém trzebaby powiększyć następnika stosunku, z tych dwóch większégo, aby ténże stosunek zmnieyszyć i uczynić równym mnieyszému stosunkowi. Niechże więc, ieśli to bydź może, stosunek *np.* drugi, toiest C, do D, będzie większy od stosunku piérwszégo A, do B; i niechby, dáymy to, miała mieyscé ta proporcyá, A : B = C : E wziąwszy E, za ilość większą od D.

Jakáżkolwiek byłaby różnica ilości D, od E, możná zawsze podzielić ilość C, na tylé części równych, aby kazdá z nich mnieyszą była od téy różnicy. Niech *m*, oznáczá liczbę tych części, a niech *c*, oznáczá każdą z tych części. Podzielmy A, na tyléż części równych, i każdą z nich oznáczmy przez *a*. Weźmy część *c*, tylé razy, aby summa, która ztąd urośnie, przybliżała się iak náybardziéy do ilości D, ale iéy nie przewyższała: za dodaniém zaś iednéy ieszcze części *c*, aby się ta summa większą stała od D, a mnieyszą od E, (ponieważ wzięliśmy *c*, za ilość mnieyszą od różnicy między E, i D.)

Niech *n*, i *n+1*, oznáczaią ilé razy się brało część *c*, przed przydaniém iednégo ostatniégo *c*, i po przydaniu. Weźmy też tylé razy ilośc *a*. Ilość B, będzie przez przypuszczénié, większá niżeli *na*, mnieyszá iednak niżeli $(n+1)a$.

Ponieważ

Ponieważ té cztéry ilości ma, czyli A; $(n+1)a$; mc, czyli C, i $(n+1)c$, są spółmierné; wypadnie więc proporcyá:

A : $(n+1)a$ = C : $(n+1)c$.

A że przez przypuszczénié má bydź A : B = C : E.

Albo B : A = E : C.

więc B : $(n+1)a$ = E : $(n+1)c$.

Że zaś przypuściliśmy, iż poprzednik B, iest mnieyszy, niżeli iego następnik $(n+1)a$; więc téż i poprzednik E, powiniénby bydź mnieyszym od swégo następnika $(n+1)c$. A że przez dowodzénié, okázał się bydź większym; więc ta proporcyá A : B = C : E, nié má wtedy mieysca, gdy E, iest większé od D: a zatém następnik D, stosunku drugiégo téy proporcyi A : B = C : D, nie iest nadto mały względém swégo poprzednika C, toiest, stosunek tén drugi C, do D, nie iest nadto wielki. Możnáby dowiéśdź takim sposobém, że i następnik 1go stosunku nie iest nad to mały do zachowania proporcyi, czyli że stosunek piérwszy, nie iest nad to wielki.

Więc dwa stosunki A : B, i C : D, są równé.

Podanié poprzedzaiącé może bydź i tak wyrażoném:

Jeżeli dwie ilości A, i B, tak iedna od drugiéy zawisły, że wráz powiększaią się, lub zmnieyszaią, i że gdy np. *B, staie się* $= b$, *wtedy* $A = a$.

gdy $B = 2b$, wtedy $A = 2a$.

gdy $B = 3b$, wtedy $A = 3a$. a w ogólności

gdy $B = nb$, wtedy $A = na$. (biorąc n, za iakąkolwiek liczbę całkowitą;) w takim razie dwie ilości A, i B, powiększaią się lub zmnieyszaią w proporcyi Jeometrycznéy, i ieżeli B zamiéniá się na β, gdy A, zamiéniá się na α, tedy będzie $\alpha : a = \beta : b$.

146. *Zadanié* 1. *Niech będą dané cztéry ilości: trzeba znaléźć taką ilość, któráby do każdéy z tamtych cztérech dodaná, uczyniła między niémi proporcyą Jeometryczną.*

Niech będą té cztéry ilości a, b, c, d.

Mianowanié. Niech będzie x, ilość szukaná, a zatém summy cztéry będą

$$a+x,\ b+x,\ c+x,\ d+x.$$

Warunek. $a+x : b+x = c+x : d+x$.

Prze-

Przeráb: Przez dzieléńié (§. 137) $a-b:c-d=a+x:c+x$.
więc . . . $a-b-c+d:c-d=a-c:c+x$.
i . . . . . $a-b-c+d:a-b=a-c:a+x$.
podobnie też $a-b\ :\ c-d\ =b+x:d+x$.
więc . . . $a-b-c+d:c-d=b-d:d+x$.
i . . . . . $a-b-c+d:a-b=b-d:b+x$.

Cztéry tedy wyrazy proporcyi których szukámy, będą następuiące:

$$\frac{(a-c)(a-b)}{a-b-c+d},\ \frac{(a-b)(b-d)}{a-b-c+d},\ \frac{(a-c)(c-d)}{a-b-c+d},\ \frac{(c-d)(b-d)}{a-b-c+d}.$$

Stosunek 1wszych dwóch wyrazów iest tén sám, co $a-c$, do $b-d$.
Stosunek 2gich dwóch wyrazów iest także tén sám, co $a-c$, do $b-d$.
Ilość zaś x, którą do każdéy ilości danéy dodadź trzeba będzie $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$.

Przykład. Niech będzie $a=3$, $b=5$, $c=9$, $d=14$;
będzie . . . $bc=45$; $ad=42$; $bc-ad=3$; $a-b-c+d=$;
$3-5-9+14=17-14=3$: $\frac{bc-ad}{a-b-c+d}=\frac{3}{3}=1$.

Dodáwszy 1 do każdéy z cztérech liczb 3, 5, 9, 14, wypadnie proporcyá $4:6=10:15$.

Uwágá. Gdy b, i c, są równé, proporcyá któréy szukámy, będzie ciągłą: a ilość którą dodadź przypadnie do każdégo ze trzech wyrazów a, b, d, będzie $\frac{bb-ad}{a-2b+d}$.

147. *Zadanié 2. Niech będą dané boki* a, *i* b, *prostokąta: trzeba znaléźć taki kwadrát, aby powiérzchniá tego prostokąta i kwadratu, były do siebie iak ich obwody.*

Mianowanié. Niech będzie x, bok kwadratu szukanégo.
Obwód iego będzie $4x$, a powiérzchniá xx.

Waru-

Warunek. $2a + 2b : 4x = ab : xx.$

Przerábianié. (Podzieliwſzy przez 2, dwa 1wſzé proporcyi wyrazy)
$a + b : 2x = ab : xx.$
(Rozmnożywſzy przez x, dwa piérwſzé wyrazy)
$(a+b)x : 2xx = ab : xx.$
$= 2ab : 2xx.$
(Porównáwſzy dwa poprzedniki, dlá równości dwóch Nasſtępników) $(a+b)x = 2ab.$

(Podzieliwſzy przez $a+b$) $x = \frac{2ab}{a+b}.$

Skąd wypádá ta proporcyá:
$a + b : 2a = b : x.$

albo nakoniec $\frac{a+b}{2} : a = b : x.$

Więc bok ſzukany kwadratu, ieſt czwártą proporcyonalną do połowy ſummy boków proſtokąta i do każdégo z nich w ſzczególności. (Co do rozwiązania Jeometrycznégo, obácz Jeometryi. Części I. §. 234, i 235.)

148. *Uwágа.* Z proporcyi téy $\frac{a+b}{2} : a = b : x$, możná łatwo wyznaczyć taką wáżność iednégo boku proſtokąta, którégo bok drugi ieſt nám iuż wiadomy, aby powiérzchnie proſtokąta i kwadratu danégo, tak ſię miały do ſiebie iak ich obwody.

Bo ponieważ wypádá ta proporcyá, $a+b : a = 2b : x$, więc $b : a = 2b - x : x$, albo $2b - x : x = b : a$. toieſt bok proſtokąta ſzukany będzie czwártą proporcyonalną do różnicy boku kwadratu, od danégo boku w proſtokącie dwa razy wziętégo, i do boku tak kwadratu, iako téż i do tego ſamégo wiadomégo boku proſtokąta.

Przykłád. Niech będzie . . . $a = 3,\ b = 6.$
$a = 4,\ b = 12.$

149. *Zadanié 3. Niech będą dané trzy krawędzie a, b, c, w Równoległościanie proſtokątnym: trzeba znaléźć bok ſześcianu takiégo, aby ſtoſunek powiérzchni Równoległościanu, i ſześcianu równy był ſtoſunkowi ich bryłowatości.*

 Miano-

Mianowanié. Niech będzie x, bok ſzukany ſześcianu.
Wyrażénié połowy powiérzchni Równoległościanu ieſt $ab+ac+bc$.
Wyrażénié iego bryłowatości ieſt . . . . . . abc.
Wyrażénié połowy powiérzchni ſześcianu ieſt $3xx$.
Wyrażénié iego bryłowatości ieſt . . . . x^3.

Warunek. $ab+ac+bc:3xx=abc:x^3$.

Przeráb: Rozmnożywſzy piérwſzé dwa wyrazy przez x, a drugié dwa przez 3, aby zrównać dwa naſtępniki; i zrównawſzy dwa poprzedniki, będzie $x(ab+ac+bc)=3abc$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez $ab+ac+bc$.

$$x=\frac{3abc}{ab+ac+bc}.$$

Rozwiąz: $x=\dfrac{3abc}{ab+ac+bc}$. Bok ſzukany ſześcianu.

Przykład. $a=6.$	$a=141.$
$b=9.$	$b=188.$
$c=15.$	$c=235.$

150. *Zadanié 4. Niech będzie daná wyſokość walca proſtégo, i promiéń iego podſtawy; trzeba wyznaczyć promiéń takiéy kuli, aby całá powiérzchniá walca i kuli, tak ſię miała iedna do drugiéy, iak ſię maią ich bryłowatości?*

Mianowanié. Niech będzie a, wyſokość daná Walca: r, promiéń podſtawy iego: x promiéń ſzukany kuli.
Niech będzie π, okrąg koła, którégo promiéń ieſt . . . 1.
Okrąg koła maiącégo promiéń r, będzie . . . . πr.
Powiérzchniá tego koła będzie . . . . $\frac{1}{2}\pi rr$.
Summa powiérzchni dwóch podſtáw Walca, będzie πrr.
Powiérzchniá zaś iego krzywá . . . . πra.
Więc całá powiérzchniá Walca, będzie . . $\pi rr+\pi ra$.
Bryłowatość Walca, będzie . . . . $\frac{1}{2}\pi rra$.
Okrąg wielkiégo koła kuli ſzukanéy, będzie . . . πx.

Po-

Powiérzchnia kuli, będzie . . . . $2\pi xx$.
Bryłowatość kuli będzie . . . . $\frac{2}{3}\pi x^3$.

Warunek. $\pi rr + \pi ra : 2\pi xx = \frac{1}{2}\pi rra : \frac{2}{3}\pi x^3$.

Przerábianié. (Podzieliwszy przez π, wszystkié wyrazy téy proporcyi) $rr + ra : 2xx = \frac{1}{2}rra : \frac{2}{3}x^3$.
(Rozmnożywszy piérwszé dwa wyrazy proporcyi przez $\frac{1}{3}x$)
$\frac{1}{3}x(rr + ra) : \frac{2}{3}x^3 = \frac{1}{2}rra : \frac{2}{3}x^3$.
(Porównáwszy dwa poprzedniki dlá równości następników)
$\frac{1}{3}x(rr + ra) = \frac{1}{2}rra$.
(Podzieliwszy przez r, obiedwie strony równania)
$\frac{1}{3}x(r + a) = \frac{1}{2}ra$.
(Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo Mianownika, a potém go opuściwszy) $2x(r + a) = 3ra$.
(Podzieliwszy obie strony przez $2(r + a)$

$$x = \frac{3ra}{2(r + a)}.$$

Rozwiązanié. $$x = \frac{3ra}{2(r + a)}.$$

Przykład. Niech będzie $a = 2r$, (taki Walec którégo wysokość równá iest śrzednicy podstawy iego, nazywa się Walcém Archimedesa.) tedy

$$x = \frac{6rr}{2(3r)} = \frac{6rr}{6r} = r,$$ co iuż w Jeometryi Części II. §. 148 okazało się.

Niechby było $r = 10$.
$a = 15$.

Będzie $$x = \frac{3.\ 10.\ 15}{2.\ 25.} = 9.$$

Byłby więc w tym razie promiéń kuli $= 9$.

151. *Uwága.* Z równania $x = \frac{3ra}{2(r + a)}$ możná wyprowadzić ważność promiénia r, podstawy Walca wyrażoną przez a, i x: możná podobnie

dobnie wyprowadzić, i ważność wyſokości a, w ważnościach r, i x; toieſt, maiąc daną kulę i promiéń podſtawy Walca proſtégo lub iego wyſokość, można wyznaczyć promiéń podſtawy iego lub wyſokość, tak, aby bryłowatości tych dwóch brył, były do ſiebie, iak ich powiérzchnie.

ROZDZIAŁ VI.

Zagadniénia drugiégo Stopnia.

Wyciąganié piérwiáſtku kwadratowégo potrzebné do rozwiązania Zagadniéń drugiégo ſtopnia okazuie widocznie różnicę tychże Zagadniéń, od Zagadniéń piérwſzégo ſtopnia.

W Zagadniéniach Rozdziáłów poprzedzaiących, ilości niewiadomé mnożoné były przez ſamé tylko ilości wiadomé, a ieżeli czaſém (iak w Zagadniéniach 35, i naſtępuiących piérwſzégo Rozdziału) mnożyły ſię przez ſiebie ſamé; tedy wyrazy takowé, albo w ſamych Mianowaniach ginęły, albo zaráz na początku przerábiania.

W Zagadniéniach zaś drugiégo ſtopnia, wyrazy té, w któré wchodzą ilości niewiadomé mnożoné przez ſiebie ſamé, giną dopiéro w Rozwiązaniu.

152. *Zadanié* 1. *Proſtokąt którégo bok iedén dwa razy ieſt tak wielki, iak bok drugi, má 72 ſtóp kwadr: w powiérzchni. Jakiéż ſą boki tego proſtokąta?*

Arytmetycznié. Ponieważ długość tego proſtokąta dwa razy ieſt tak wielká, iak ſzérokość; więc powiérzchniá iego będzie dwa razy tak wielká, iak powiérzchniá kwadratu iego ſzérokości: więc kwadrát ſzérokości dwa razy wzięty ieſt 72, a ráz wzięty ieſt 36. Więc ſzérokość tego proſtokąta wyrazi ſię przez liczbę, która przez ſiebie rozmnożoná, czyni 36, toieſt, wyrazi ſię przez piérwiáſtek kwadratowy liczby 36. Takim zaś piérwiáſtkiém, ieſt liczba 6.

Szérokość proſtokąta . . . . 6 ſtóp.
Długość . . . . 12.
Powiérzchniá . . . . 72 ſtóp kw:

Algie-

Algiebraicznie. Mian: Szérokość . . . . . . x.
Długość . . . . . . $2x$.
Powiérzchniá . . . . $2xx$.

Warunek. $2xx = 72$.

Przerab: (Podzieliwszy obie strony przez 2) . . . $1xx = 36$.
(Wyciągnąwszy piérwiast: kwadr:) . . . $1x = 6$.

Rozwiązanié. $1x = 6$. Szérokość szukaná.
Reszta iak wyżéy.

Insze przykłady. Znaléźć dwie liczby, z którychby iedna trzy razy była tak wielká, iak drugá: a które rozmnożywszy iednę przez drugą, wypadłoby na Wieloczyn 75.

Znaléźć dwie liczby, z którychby iedna była $\frac{2}{3}$ *drugiéy, a Wieloczyn ich 96.*

153. *Zadanié 2. Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn*
piérwszéy przez drugą był . . . . 18.
piérwszéy przez trzecią . . . . . 24.
drugiéy przez trzecią . . . . . . 48.

Arytmetycznie. Gdy trzecią liczbę rozmnożymy osobno przez piérwszą, i osobno przez drugą liczbę, Wieloczyn w drugim razie, będzie dwa razy tak wielki, iak w piérwszym: a zatém drugá liczba musi być dwa razy tak wielká, iak piérwszá. Że zaś Wieloczyn piérwszéy liczby przez drugą iest 18; więc (podług piérwszégo Zadania) kwadrát piérwszéy liczby iest 9, piérwszá zatém liczba iest 3, a drugá 6. Trzecią iest wieloráz 24 przez 3, albo 48. przez 6. toiest 8.

Liczba piérwszá . . . . . . 3.
. . . . drugá . . . . 6.
. . . . trzeciá . . . . 8.

Wieloczyn piérwszéy przez drugą . . . 18.
. . . . . . piérwszéy przez trzecią . . 24.
. . . . . . drugiéy przez trzecią . . . . 48.

Algiebraicznie. Mian: Piérwszá liczba . . . . x.

Drugá . . . . $\frac{18}{x}$.

Trzeciá . . . . $\frac{24}{x}$.

Wieloczyn drugiéy liczby przez trzecią $\frac{432}{xx}$.

Warunek. $\frac{432}{xx} = 48$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez xx) $432 = 48xx$.
(Podzieliwſzy przez 48) . . . . $9 = xx$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſt: kwadr:) . . . $3 = x$.

Rozwiązanié. $x = 3$. Piérwſzá liczba, tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch piérwſzych był 12, dwóch ſkraynych był 14, a dwóch oſtatnich był 42.

Znaléźć takié trzy liczby, aby Wieloczyn dwóch piérwſzych był 96, dwóch ſkraynych 120, a dwóch oſtatnich 180.

Ogólnie. Niech będą wieloczyny dané a, b, c.

Mianowanié. 1wſzá liczba . . . . x.

2gá . . . . $\frac{a}{x}$.

3ciá . . . . $\frac{b}{x}$.

Wieloczyn dwóch oſtatnich . $\frac{ab}{xx}$.

Warunek. $\frac{ab}{xx} = c$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez xx) $ab = cxx$.

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez c.) . . $\frac{ab}{c} = xx$.

(Wycią:

(Wycią: piérwiáſt: kwadr:) . . . $\sqrt{\frac{ab}{c}} = x.$

$$\frac{aa}{xx} = aa : \frac{ab}{c} = aa \times \frac{c}{ab} = \frac{ac}{b}.$$

Więc $\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{ac}{b}}.$

$$\frac{bb}{xx} = bb : \frac{ab}{c} = bb \times \frac{c}{ab} = \frac{bc}{a}.$$

Więc $\frac{b}{x} = \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

Rozwiązanié. Liczby ſzukané $\sqrt{\frac{ab}{c}}, \sqrt{\frac{ac}{b}}, \sqrt{\frac{bc}{a}}.$

albo $\sqrt{\frac{abc}{cc}}, \sqrt{\frac{abc}{bb}}, \sqrt{\frac{abc}{aa}}.$

albo $\frac{\sqrt{abc}}{c}, \frac{\sqrt{abc}}{b}, \frac{\sqrt{abc}}{a}.$

Toieſt, chcąc znaléźć każdą ze trzech ilości, trzeba zrobić Wieloczyn ze trzech Wieloczynów danych, wyciągnąć z niégo piérwiáſtek kwadratowy, a Wieloráz tego piérwiáſtku przez Wieloczyn dany dwóch ilości, okáże ważność ilości trzeciéy, która w tén Wieloczyn niewchodzi.

Przykłád. $a = 18.$ $\frac{ab}{c} = \frac{18.\ 24.}{48.}.\ \sqrt{\frac{ab}{c}} = 3.$

$b = 24.$

$c = 48.$ $\frac{ac}{b} = \frac{18.\ 48.}{24}.\ \sqrt{\frac{ac}{b}} = 6.$

$\frac{bc}{a} = \frac{24.\ 48.}{18.}.\ \sqrt{\frac{bc}{a}} = 8.$

154. *Zadanié 3. Znaléźć trzy takié liczby, aby Wieloczyn z piérwſzéy i z ſummy dwóch pozoſtałych był* . . . . 18.
Z drugiéy, i z ſummy dwóch innych . . . . 24.
Z trzeciéy, i z ſummy dwóch innych . . . . 30.

Arytmetycznie. Wieloczyny dané tak piérwſzy iak i drugi, zawiéraią w ſobie Wieloczyn dwóch piérwſzych liczb ſzukanych.

Wieloczyny dané piérwſzy i trzeci zawiéraią w ſobie podobnie Wieloczyn piérwſzéy i trzeciéy liczby ſzukanéy.

Wieloczyny dané drugi i trzeci zawiéraią także w ſobie Wieloczyn drugiéy i trzeciéy liczby ſzukanéy.

Więc ſumma trzech Wieloczynów danych, zawiérá w ſobie dwa razy ſummę trzech Wieloczynów ze trzech liczb ſzukanych branych po dwie. A że ta ſumma trzech Wieloczynów danych ieſt 72, a połowa iéy 36; więc ſumma póiedynczá Wieloczynów liczb ſzukanych po dwie branych.

toieſt 1wſzéy i 2giéy.
1wſzéy i 3ciéy. } ieſt 36.
2giéy i 3ciéy.

Że zaś ſumma Wieloczynów trzeciéy liczby przez piérwſzą i drugą ieſt 30.

Więc Wieloczyn piérwſzéy przez drugą będzie różnicą między 36, i 30, toieſt 6.

Summa także Wieloczynów 2giéy liczby przez 1wſzą i 3cią ieſt 24.

Więc Wieloczyn piérwſzéy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 24, toieſt 12.

Naoſtatek ſumma Wieloczynów 1wſzéy liczby przez 2gą i 3cią ieſt 18.

Więc Wieloczyn 2giéy i 3ciéy będzie różnicą między 36, i 18, toieſt 18.

Całé więc to Zagadniénié przywiedzioné ieſt tym ſpoſobém do poprzedzaiącégo, aby znaléźć trzy liczby, których po dwie branych wiadomé nám ſą Wieloczyny.

Té trzy liczby będą 2, 3, 6; co łatwo ſpráwdzić możná.

Algiebraicznie. Mianowanié. Liczby trzy ſzukané x, y, z.

Waru-

Warunek. $\begin{cases} x(y+z) = 18. \\ y(x+z) = 24. \\ z(x+y) = 30. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} xy + xz \quad = 18. \\ xy \quad + yz = 24. \\ \quad xz + yz = 30. \end{cases}$

Dodáwſzy . . . $2xy + 2xz + 2yz = 72.$
Podz: przez 2 $\quad xy + xz + yz = 36.$
Odiąwſzy naſtępnie każdé ze trzech równáń Przerábiania.

$$xy \quad . \quad . \quad . \quad . = 6.$$
$$xz \quad . \quad . = 12.$$
$$yz = 18.$$

Ze dwóch piérwſzych równáń
poniewáż . . . . $2xy = 12.$
$xz = 12.$
Wypádá . . . . . $2xy = xz.$
a zatém . . . . . $2y = z.$
więc . . . . . . $2yy = yz.$

A że . . . . . . $yz = 18.$
więc . . . . . $2yy = 18.$
$yy = 9.$
$y = 3.$
$z = 2y = 6.$

$$x = \frac{6}{y} = \frac{6}{3} = 2.$$ tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć trzy takié liczby, aby Wieloczyn z iwſzéy i z ſummy dwóch pozoſtałych był . . . 80.
. . . z 2giéy . . . . 98.
. . . z 3ciéy . . . . 108.

Niechby znowu trzy Wieloczyny dané były:
372.
420.
432.

Ogólnie. Trzy Wieloczyny dané, ſą p, q, r.

 xy

$$\textit{Warunek.}\begin{cases} xy+xz & =p.\\ xy \quad +yz & =q.\\ xz+yz & =r.\end{cases}$$

Więc $2xy+2xz+2yz=p+q+r.$

$$xy+xz+yz=\frac{p+q+r}{2}.$$

A że 1. . . . . . . $xz+yz=r.$

Więc . . $xy=\frac{p+q+r}{2}-r=\frac{p+q-r}{2}.$

2. $xy+yz=q.$

Więc . . . . $xz=\frac{p+q+r}{2}-q=\frac{p-q+r}{2}.$

3. $xy+xz=p.$

Więc . . . . $yz=\frac{p+q+r}{2}-p=\frac{-p+q+r}{2}.$

Więc, (podług Zagadnienia poprzedzaiącego) położywszy zamiaſt a; ilość $\frac{p+q-r}{2}$; zamiaſt b, $\frac{p-q+r}{2}$; zamiaſt c, $\frac{-p+q+r}{2}$

będzie $xx=\frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(-p+q+r)^2}.$

$$x=\frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(-p+q+r)}.$$

$$yy=\frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(p-q+r)^2}.$$

$$y=\frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p-q+r)}.$$

$$zz=\frac{(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}{2(p+q-r)^2}.$$

$z=$

$$z = \frac{\sqrt{(2(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p+q-r)}.$$

Przykład. Niechby było $p = 18.$
$q = 24.$
$r = 30.$

Będzie $xx = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 36^2} = \frac{12 \times 24}{2 \times 36} = 4.$

$x = 2.$

$yy = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 24^2} = \frac{12 \times 36}{2 \times 24} = 9.$

$y = 3.$

$zz = \frac{12 \times 24 \times 36}{2 \times 12^2} = \frac{24 \times 36}{2 \times 12} = 36.$

$z = 6.$

155. *Uwága.* Gdyby nám przyszło szukać trzech liczb, wiadomé maiąc Wieloczyny każdéy z nich, przez różnicę dwóch pozostałych; tedy zagadniénié na pozór wyznaczoné byłoby niewyznaczoném w saméy rzeczy.

Jakoż niech będą trzy równania
$x(y-z)=p.$
$y(x-z)=q.$
$z(x-y)=r.$
toiest $xy - xz \qquad = p.$
$xy \qquad - yz = q.$
$xz \qquad - yz = r.$

Odiąwszy 1wszé równanié od 2giégo,
będzie $xz - yz = q - p.$

A że 1wszá strona tego równania iest ta sama, co i piérwszá strona 3go równania; więc i drugié strony tychże równáń powinny bydź równé: a zatém, ieżeli $r, = q - p$, tedy 3cié równanié dané iest zbytecznéin, ponieważ iuż się zamykało we dwóch 1wszych równaniach. Jeżeli zaś nie iest $r = q - p$; tedy 3cié równanié sprzeciwiá się dwóm piérwszym, i zagadniénié staie się nie podobném.

156. *Zadanie 4. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká iak drugá, a ſumma ich kwadratów 45.*

Arytmetycznie. Większá z tych liczb ieſt podwóyná mnieyſzéy, więc iéy kwadrát ieſt poczwórny kwadratu mnieyſzéy, a ſumma tych dwóch kwadratów, zamyká w ſobie 5 razy kwadrát téyże mnieyſzéy liczby. Więc kwadrát mnieyſzéy liczby 5 razy wzięty czyni 45, a zatém poiedynczo wzięty będzie $\frac{1}{5}$ liczby 45, toieſt 9. Liczba tedy mnieyſzá ieſt 3, a większá 6.

Mnieyſzá liczba . . .	3. . . .	Kwadrát iéy . .	9.
Większá	6. . . .	Kwadrát iéy . .	36.
		Summa	45.

Algiebr: Mian:

Mnieyſzá liczba	x.
Większá	$2x$.
Kwadrát mnieyſzéy	xx.
Kwadrát większéy	$4xx$.
Summa kwadr: . . .	$5xx$.

Warunek. $5xx = 45$.

Przeráb: (Podziel: obie ſtrony przez 5) . . $xx = 9$.
(Wyciągn: piérwiáſt: kwadr:) . . . $x = 3$ tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby z których iedna byłaby potróyną drugiéy, a ſumma ich kwadratów 250.

I znowu znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby $\frac{2}{3}$ drugiéy, a ſumma ich kwadratów 325.

Ogólnie. Znaléźć dwie liczby któréby były do ſiebie w ſtoſunku m, *do* n: *ſummą zaś ich kwadratów byłaby ilość daná* q.

Mian: Liczby ſzukané mx. Kwadraty . . . $mmxx$.
. . . . . . nx. . . . . $nnxx$.

Summa . . . . . $xx(mm+nn.)$

Warunek. $xx(mm+nn)=q$.

Przeráb:

Przerábianié. (Podzieliwszy obie strony przez $mm + nn$)

$$xx = \frac{q}{mm+nn}.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$x = \sqrt{\left(\frac{q}{mm+nn}\right)}$$

Rozwiązanié. $mx = m\sqrt{\left(\frac{q}{mm+nn}\right)}.$

$$nx = n\sqrt{\left(\frac{q}{mm+nn}\right)}.$$

Sprawdzénié. $mmxx = mm\left(\frac{q}{mm+nn}\right).$

$$nnxx = nn\left(\frac{q}{mm+nn}\right).$$

$$xx(mm+nn) = (mm+nn)\left(\frac{q}{mm+nn}\right) = q.$$

Przykład. Niech będzie $m = 1.$
$n = 3.$
$q = 250.$

$$xx = \frac{q}{mm+nn} = \frac{250}{10} = 25.$$

x albo $mx = 5.$
$3x$ albo $nx = 15.$

$$xx = 25$$
$$9xx = 225.$$
$$\overline{10xx = 250.}$$

Uwága. Zagadnienié następuiące: *Znaléźć trzy takié liczby, aby Wieloczyny każdéy z nich, przez iedną i drugą z pozostałych były wiadomé, i aby summa kwadratów z tych dwóch liczb ostatnich była także wiadomá:* to, mówię, *Zagadnienié wychodzi na poprzedzaiącé.*

157. *Zadanié 5. Znaléźć trzy liczby których wiadomé są trzy Wielorazy, wypadaiącé z Wieloczynów liczb tych po dwie branych, a przez 3cią pozostałą podzielonych.*

Niech będą trzy Wielorazy dané a, b, c.

Mianowanié. Liczby szukané x, y, z.

Warunek. $$\begin{cases} \frac{xy}{z} = a. \\ \frac{xz}{y} = b. \\ \frac{yz}{x} = c. \end{cases}$$

Przerób: $$\frac{xy}{z} : \frac{xz}{y} = \frac{y}{z} : \frac{z}{y} = yy : zz.$$

że iest . . . $\frac{xy}{z} : \frac{xz}{y} = a : b.$

więc . . . . $yy : zz = a : b.$

a zatém . . . . . . $y : z = aa : ab = a : \sqrt{ab}.$

że zaś . . . . $\frac{xy}{z} = a.$

więc . . . . $y : z = a : x.$ A zatém

$x = \sqrt{ab}.$

Podobnie będzie . . . . $y = \sqrt{ac}.$

$z = \sqrt{bc}.$

Rozwiązanié $x = \sqrt{ab}$; $y = \sqrt{ac}$; $z = \sqrt{bc}$.

Przykład. Niech będzie $a = 4.$
$b = 9.$
$c = 36.$

albo $a = 8.$
$b = 18.$
$c = 32.$

158. *Zadanié 6. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká iak drugá, a różnica ich kwadratów 48.*

Arytmetycznie. Większá z tych liczb ieſt podwóyná mnieyſzéy, więc iéy kwadrát ieſt poczwórny kwadratu mnieyſzéy, a różnica tych kwadratów będzie potróyná kwadratu téyże liczby mnieyſzéy. Więc kwadrát liczby mnieyſzéy trzy razy wzięty czyni 48, a zatém poiedynczo wzięty będzie $\frac{1}{3}$ liczby 48, toieſt 16. Liczba tedy mnieyſzá ieſt 4, a większá 8: toieſt piérwiáſtek kwadratowy ſummy 48, i 16, czyli 64.

Mnieyſzá liczba . . .	4.	Kwadrát iéy . . .	16.
Większá	8.	Kwadrát	64.
		Różnica . . .	48.

Algiebr: Mian: Mnieyſzá liczba . . . . x.
Większá . . . . . . $2x$.
Kwadrát mnieyſzéy . . . xx.
. . . . . . większéy . . . $4xx$.

Różnica kwadratów $3xx$.

Warunek. $3xx = 48$.

Przeráb: (Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3) $1xx = 16$.
(Wyciąg: piérwiáſt: kwadr:) . . . . . $1x = 4$.

Rozwiązanié. $x = 4$. Tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby potróyną drugiéy, a różnica ich kwadratów 200.

I znowu znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby $\frac{2}{3}$ drugiéy, a różnica ich kwadratów 80.

Ogólnie. Znaléźć dwie liczby, z których większá miałaby do mnieyſzéy ſtoſunek m, *do* n, *a różnica ich kwadratów równałaby ſię liczbie danéy* q.

Mianowanié. Liczby ſzukané . . . . . . mx, nx.
Ich kwadraty . . . . . $mmxx$, $nnxx$.
Różnica tych kwadratów . $mmxx—nnxx$.
albo . . . . $xx(mm—nn)$.

Wa-

Warunek. $xx(mm-nn)=q$.

Przerábianié. (Podzieliwszy obie strony przez $mm-nn$)

$$xx=\frac{q}{mm-nn}.$$

(Wyciągn: piérwiástek kwadratu)

$$x=\sqrt{\left(\frac{q}{mm-nn}\right)}.$$

Rozwiąz: $mx=m\sqrt{\left(\frac{q}{mm-nn}\right)}$; $mmxx=mm\left(\frac{q}{mm-nn}\right)$

$nx=n\sqrt{\left(\frac{q}{mm-nn}\right)}$; $nnxx=nn\left(\frac{q}{mm-nn}\right)$

Sprawdzénié. $mmxx-nnxx=\frac{q}{mm-nn}(mm-nn)=q$.

Przykład. Niech będzie $m=3$.
$n=2$.
$q=80$.

$$\frac{q}{mm-nn}=\frac{80}{9-4}=\frac{80}{5}=16.$$

$$\sqrt{\left(\frac{q}{mm-nn}\right)}=4$$

Liczby szukané $mx=12$. Kwadraty . . . 144.
$nx=8$ . . . . 64.

Różnica kwadr: 80.

159. *Uwági.* Do poprzedzaiącégo Zadania łatwo można przywiéśdź następuiącé: *Znaléźć trzy liczby, z których iednéy wiémy wieloczyny przez dwie pozostałé brané z osobna, i wiémy także różnicę kwadratów, tych dwóch liczb ostatnich.*

Uważaiąc czwárté i szósté poprzedzaiącé zadania Jeometrycznie; wychodzą oné na iedno, iak gdyby przyszło wyznaczyć Tróykąt prostokątny,

którégo wiémy przeciw prostokątną, i stosunek dwóch Ramión kąta prostégo, (co służy do 4tégo Zadania,) albo którégo wiadomé nám iest iedno ramié kąta prostégo, i stosunek dwóch innych boków, (co służy do 6tégo Zadania.) Rozwiązanié Jeometryczné tych dwóch Zadáń, iest bardzo łátwé.

W poprzedzaiących Zadaniach niewiadomym był tylko wyráz zawiéraiący kwadrát ilości niewiadoméy, a zatém oswobodziwszy go (przez sposoby w Rozdziale I. wyłożoné) z działáń którémi był powikłany, przychodziliśmy do kwadratu niewiadomégo, równégo kwadratowi wiadomému, a naostatek doszliśmy i do saméy ilości niewiadoméy, równaiącéy się piérwiástkowi kwadratowému ilości wiadoméy. Działania, które nám czynić trzeba było do rozwiązania tych Zadáń prostych, różniły się tylko od działáń, któré nás wyżéy zatrudniały, wyciąganiém piérwiástku kwadratowégo z liczb wiadomych.

Ale gdy się trafi, że Równanié, które rozwiązać przypádá, zamyká w sobie dwa wyrazy z niewiadomą ilością, a w jednym z tych wyrazów iest ilość niewiadomá, rozmnożoná przez siebie samę, w drugim zaś iest taż sama ilość rozmnożoná przez ilości wiadomé; w takim razie trzeba uczynić poprzednicze działania, przez które iedna strona Równania zawiéraiącá wyrazy niewiadomé, stałaby się kwadratém. I to czyni powtórną różnicę w rozwiązaniu Zagadnień piérwszégo stopnia, od rozwiązania Zagadnień drugiégo stopnia.

160. *Zadanié 7. Znaléźć dwie liczby, których różnicá iest 2, a Wieloczyn 35.*

Arytmetycznie. Z przykładów §. 116 i następuiących łátwo wnieść możná, że Wieloczyn ze dwóch ilości, równá się różnicy, kwadratów z połowy ich summy i z połowy różnicy: albo co na iedno wychodzi, że kwadrát z połowy summy dwóch ilości, równá się summie z jch Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich różnicy. W przypádku teraźnieyszym połowa różnicy danéy iest 1, Wieloczyn dany iest 35, summa tych dwóch ilości, a zatém kwadrát połowy summy iest 36: przeto sama połowa summy będzie 6.

Więc Zagadnienié uczynioné wypádá na to, aby znaléźć dwie ilości, których połowa summy iest 6, a połowá różnicy 1. Będzie tedy większá ilość 7, a mnieyszá 5: ich Wieloczyn 35, a Różnica 2.

Algiebr: Mian: Mnieyszá ilość . . . . . . x.
Większá . . . . $x + 2$.

Wieloczyn . . . . . . $xx + 2x$.

 Warunek

Warunek. $xx + 2x = 35$.

Gdy ilość ſkłádá ſię ze dwóch części, wtedy kwadrát iéy ſkłádać ſię będzie ze trzech części; toieſt, z kwadratu piérwſzéy części, z podwóynégo Wieloczynu piérwſzéy części przez drugą, i z kwadratu drugiéy części (116.) Wyſtawuiąc ſobie x, iako część ilości złożonéy ze dwóch wyrazów, z których kwadrát czynić przypádá, xx będzie kwadratém téy części, $2x$ będzie podwóynym Wieloczynem téy części przez część drugą, a zatém $1x$ będzie poiedynczym Wieloczyném piérwſzéy części x przez drugą: więc ta drugá część będzie 1, któréy kwadratém ieſt także 1. Dodáwſzy tedy 1, do piérwſzéy ſtrony równania podanégo, będzie $xx+2x+1$, toieſt kwadrát z $x+1$. Dlá zachowania równości dodáwſzy także 1, i do drugiéy ſtrony, będzie Równanié $xx + 2x + 1 = 36$. albo $(x+1)^2 = 36$. Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy po obu ſtronach, będzie $x + 1 = 6$. Odiąwſzy 1, od obu ſtrón . . . . . $x = 5$.

Rozwiązanié. $x = 5$. Mnieyſzá liczba.
$x + 2 = 7$. Większá liczba.
$xx + 2x = 35$. Wieloczyn równy danému.

Uwdga. Przybyło tu nowé działanié w Przerábianiu téy ſtrony Rówania, która zamykała w ſobie wyrazy niewiadomé. To przerábianié wykonaliśmy, przywiódłſzy do kwadratu tę ſtronę przez wzięcié połowy Spółczynnika w drugim wyrazie $2x$, toieſt, przez wzięcié 1, i przez dodanié do każdéy ſtrony Równania, kwadratu téy połowy, toieſt 1.

Inſzé przykłady. Niech będzie różnica daná 6, a Wieloczyn 55.

Przydziémy do Równania . . . $xx + 6x = 55$.

Spółczynnikiém drugiégo wyrazu ieſt 6, połowa iego 3, a kwadrát téy połowy 9. Dodáwſzy tén kwadrát do obu ſtrón, będzie $xx + 6x + 9 = 64$.
albo . . . . . . $(x+3)^2 = 64$.
Wyciągn: piérwi: kwadr: $x + 3 = 8$.
a ſamo . . . . . . $x = 5$.

Niech znowu będzie Różnica daná 8, a Wieloczyn 105.

W równaniu $xx+8x=105$. połowa Spółczynnika wyrazu drugiégo, ieſt 4: dodáwſzy do obu ſtrón kwadrát téy połowy, toieſt 16; będzie
$$xx + 8x + 16 = 121.$$
albo . . . $(x + 4)^2 = 121$.

Wycią-

Wyciągnąwszy piérwiástek kwádratowy po obu stronach . . . . $x+4=11.$

$x \quad =7.$

Ogólnié. Niech będzie Rożnica daná: 2d, *a Wieloczyn dany* p.

Mianowanié. Mnieyszá ilość . . . . $x.$

Większá ilość . . . . $x+2d.$

Wieloczyn . . . . $xx+2dx.$

Warunek. $xx+2dx=p.$

Przeráb: Połowa Spółczynnika ilości niewiadoméy w drugim wyrazie iest d, kwádrát téy połowy dd. Dodáwszy tén kwadrát do obu strón, będzie . . . . $xx+2dx+dd=p+dd.$

albo . . . $(x+d)^2 \quad =p+dd.$

Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy po obu stronach . . . . $x+d=\sqrt{(p+dd)}.$

Odiąwszy d, od obu strón . . . $x \quad =\sqrt{(p+dd)}-d.$

Rozwiązanié. $x=\sqrt{(p+dd)}-d.$ Mnieyszá ilość.

$x+2d=\sqrt{(p+dd)}+d.$ Większá ilosc.

$\sqrt{(p+dd)}-d.$ Mnożny.

$\sqrt{(p+dd)}+d$ Mnożnik.

$p+dd-d\sqrt{(p+dd)}.$ Wieloczyn przez $\sqrt{(p+dd)}$. (*)

$d\sqrt{(p+dd)}-dd.$ Wieloczyn przez d.

$p+dd \quad -dd=p.$ Wieloczyn cały równaiący się Wieloczynowi danému.

Ogólné Formy dopiéro wywiedzioné možná tak wymiénić:

Do danégo Wieloczynu má się dodadź kwadrát połowy Różnicy danéy, a z téy summy má bydź wyciągniony piérwiástek kwadratowy. Dopiéro do tego piérwiástku dodaie się lub od niego odeymuie połowa Rożnicy danéy: i tak nakoniec znayduie się większá ilość w summie, a mnieyszá w reszcie.

(*) Poniewáż piérwiástek kwadratowy iakiéy ilości, iest tą ilością, która przez siebie rozmnożoná, wydaie ilość, któréy iest piérwiástkiém; więc Wielo-

Przykład. Niech będzie $2d = 6$; $d = 3$.

$$p = 55.$$
$$dd = 9;\ p + dd = 64.$$
$$\sqrt{(p+dd)} = 8.$$
$$\sqrt{(p+dd)} + d = 11.$$
$$\sqrt{(p+dd)} - d = 5.$$

We wszystkich przykładach poprzedzaiących umyślnie się dobiérało liczb takich, że można było wyciągnąć Piérwiástek kwadratowy z ilości wiadomych, gdzie tego była potrzeba. Mogą się zaś zdarzyć i takié przykłady, w których piérwiástek kwadratowy wyciągnionym bydź nié może z ilości wiadomych z których przypádá wyciągnąć piérwiástek kwadratowy, i takié ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (irrationales *albo* incommensurabiles.) Nowá stąd pokazuie się Różnica, między Rozwiązaniém Zagadnién piérwszégo i drugiégo stopnia. Gdy w Zagadnieniach piérwszégo stopnia wchodzącé tam ilości wiadomé, są spółmiernémi, będą spółmiernémi także i niewiadomé ilości, odpowiedaiącé na Zagadniénié. W Zagadniéniach zaś drugiégo stopnia bardzo się często przytráfiá, że chociáż ilości wiadomé będą spółmiernémi, wszelako ważność ilości szukanych pokaże się bydź niespółmierną.

Przykład. Niech będzie $2d = 6$.

$$p = 9.$$
$$p + dd = 9 + 9 = 18 = 9 \times 2.$$
$$\sqrt{(p+dd)} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$ Ilość niespółmierná.

Dwie tedy są ilości szukané . . . . . $3\sqrt{2} + 3$.
$3\sqrt{2} - 3$.

Uwága. Wprawiaiąc Uczniów w Rozwięzywanié Równán składanych, aby nabrali łatwości w takowém rozwięzywaniu, w którém się równán składanych ustrzedz nié można; trzeba oráz im pokazać, iż częstokroć obrotnie sobie postąpiwszy w Mianowaniach, mogą tego dokázać: iż z samémi

---

czyn ilości $\sqrt{(p+dd)}$ przeż nię samę, toiest kwadrát ilości $\sqrt{(p+dd)}$ iest $p+dd$.

Tak téż $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, bo niech będzie $\sqrt{a} = p$; $\sqrt{b} = q$; Więc $a = pp$; $b = qq$; a zatém $ab = ppqq = pq \times pq$; a ztąd $\sqrt{ab} = pq$; że zaś $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = pq$; Więc $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

mi tylko prostémi równaniami, a nie z składanémi mieć będą do czyniénia. I tak w poprzedzaiącém Zadaniu, zamiást coby mieli szukać bezśrzednie obudwóch ilości żądanych, których daná iest różnica i Wieloczyn; mogą szukać naprzód summy tych dwóch ilości, i oznaczyć większą ilość przez połowę ich summy wráz z połową ich Rożnicy, mnieyszą zaś przez połowę także ich summy, odiąwszy od niéy połowę ich Różnicy.

Mianowanié. Niech będzie summa szukaná . . . $2s$.
Różnica . . . . $2d$.
Ilości szukané . . . $s+d$ i $s-d$.
Wieloczyn . . . . $ss-dd$.

Warunek. $ss-dd=p$.

Przerábianié. (Dodáwszy dd po obu stronach)
$ss=p+dd$.
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy.)
$s=\sqrt{(p+dd.)}$

Rozwiązanié. $s+d=\sqrt{(p+dd)}+d$. | Wyrażenia dwóch ilości
$s-d=\sqrt{(p+dd)}-d$. | szukanych takié iak wyżéy.

161. *Zadanié 8. Znaléźć dwie liczby, których summa 20, a Wieloczyn 91.*

Arytmetycznie. Ponieważ kwadrát połowy summy dwóch ilości równá się summie z jch Wieloczynu, i z kwadratu połowy ich Różnicy, (116 i następ.) więc w przypádku danym 100 równać się będzie Summie z Wieloczyna 91, i z kwadratu połowy różnicy, liczb szukanych: a zatém kwadrát téyże połowy różnicy równy będzie różnicy między 100, i 91, toiest, równy będzie liczbie 9: więc sama połowa Różnicy liczb szukanych iest 3.

Ilości szukané $\begin{cases} 10+3=13. \\ 10-3=7. \end{cases}$

Algiebraicznie. Piérwszym sposobém.

Mianowanié. Jedna ilość szukaná . . . x.
Drugá . . . . . $20-x$.

Wieloczyn . . . $20x-xx$.

 Waru-

Warunek. $20x - xx = 91$.

Przerábiánié. (Dodáwſzy xx po obu ſtronach)
$$20x = 91 + xx.$$
(Odiąwſzy $20x$ po obu ſtronach)
$$0 = 91 + xx - 20x.$$
albo $xx - 20x + 91 = 0$.

Dopełnivmy kwadratu, kładąc kwadrát z 10, toieſt, z połowy ſpółczynnika drugiégo wyrazu za wyráz trzeci, to zaś uczynimy przydáwſzy 9, do trzeciégo wyrazu 91, i oráz do drugiéy ſtrony. Będzie tedy . . . .
. . . $xx - 20x + 100 = 9$.
albo $(x - 10)^2 = 9$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy po obu ſtronach)
$$x - 10 = 3.$$
(Dodáwſzy 10 po obu ſtronach)
$$x = 13.$$

Rozwiązanié. $x = 13$. Jedna ilość ſzukaná.
$20 - x = 7$. Drugá ilość ſzukaná.

$20x - xx = 91$. Wieloczyn.

Drugim ſpoſobém.

Mianowanié. Różnica ſzukaná dwóch liczb . . $2d$.
Liczby ſzukané . . . . . $10 + d$, i $10 - d$.
Ich wieloczyn . . . . $100 - dd$.

Warunek. $100 - dd = 91$.

Przerábianié. (Dodáwſzy dd po obu ſtronach)
$$100 = 91 + dd.$$
(Odiąwſzy 91 po obu ſtronach)
$$9 = d.$$
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)
$$3 = d.$$

Rozwiązanié. $10 + d = 13$. $10 - d = 7$. } tak iak wyżéy.

Inſzé

Inſzé przykłady. Summa daná . . . . 48 . . . . 50.
Wieloczyn . . . . 560 . . . 489.

Ogólnie. Summa daná . . . . $2s$.
Wieloczyn dany . . . . . p.

Mianowanié. Różnica ſzukaná dwóch liczb . . . $2d$.
Liczby ſzukané . . . . $s+d$.
$s-d$.

Wieloczyn $ss-dd$.

Warunek. $ss-dd=p$.

Przerábianié. (Dodáwſzy dd po obu ſtronach)
$ss=p+dd$.
(Odiąwſzy p po obu ſtronach)
$ss-p=dd$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)
$d=\sqrt{(ss-p)}$.

Rozwiąz: $d=\sqrt{(ss-p)}$. Połowa różnicy dwóch liczb ſzukanych
$s+d=s+\sqrt{(ss-p)}$ } Liczby ſzukané.
$s-d=s-\sqrt{(ss-p)}$ }
$s+\sqrt{(ss-p)}$ Mnożny.
$s-\sqrt{(ss-p)}$ Mnożnik.

$ss+s\sqrt{(ss-p)}$ Wieloczyn przez s.
$-s\sqrt{(ss-p)}-(ss-p)$ Wieloczyn przez $-\sqrt{(ss-p)}$.
$ss \quad -(ss-p)=p$. Wiel: cały.

Przykłád. Niech będzie . . . $s=24$.
$p=560$.

$ss=576$.
$p=560$.

$ss-p=16$.
$\sqrt{(ss-p)}=4=d$.

$s+\sqrt{(ss-p)}=28$.
$s-\sqrt{(ss-p)}=20$.

162. *Uwági* 1. Ponieważ Wieloczyn dwóch liczb, powinién bydź powiękſzonym przez kwadrát połowy ich Różnicy, aby tak powiękſzony zrównáł kwadrát połowy ich ſummy; przetó tén Wieloczyn będzie zawſze mnieyſzy, niżeli kwadrát połowy ſummy dwóch liczb: a zatém aby Zagadniénié rozwiązać możná, trzeba aby Wieloczyn dany p, mnieyſzym był od $ſſ$. Tego w ſaméy rzeczy uczą nás i bez rozumowania, ſamé poprzedzaiącé Formy.

Jakoż kwadrát ilości przydaynéy lub uiemnéy ieſt zawſze przydaynym (60 i náſtęp:): a zatém ieżeli uważać kiedy muſimy ilość uiémną, iak kwadrát; tedy wyobrażénia piérwiáſtku kwadratu tego wyſtawić ſobie żádną miarą nie będziémy mogli: bo piérwiáſtkiém tym nié może bydź, ani ilość przydayná, ani uiémná, a to dlá tego, że i w piérwſzym, i w drugim razie kwadrát téy ilości, byłby przydaynym, i nié mógłby wydádź ilości uiémnéy, która powinna bydź iego kwadratém.

Piérwiáſtki tedy kwadratowé ilości uiémnych, podaią nowy gatunek ilości, które ſię nazywaią *beziſtotnémi*, (imaginariæ,) z przyczyny, iż nié można ich ſobie wyſtawić pod żadną poſtacią iſtotnych rzeczy, i że ſą przeciwnémi ilościóm tym, które ſię nazywaią *iſtotnémi*, (reales.)

Przykłád. Podzielić liczbę 10, na dwie części, których Wieloczyn byłby 26.

Podług Formy poprzedzaiącéy $ſſ - p = dd$, znaydziémy

$$dd = 25 - 26 = -1.$$

a zatém $d = \sqrt{-1}$. Ilość beziſtotná.

Wyrażénia także ilości ſzukanych będą beziſtotné

$$5 + \sqrt{-1}.$$
$$5 - \sqrt{-1}.$$

Lubo zaś té dwie oſtatnié ilości ſą beziſtotnémi, czynią iednak zadoſyć dwóm Warunkóm podanym, iako to łatwo ſpráwdzić možná w ſzczególności.

Zgádzanié ſię tych wyrażéń z dwóma Warunkami Zadania ſtąd pochodzi, że maiąc wzgląd na Warunki dané, ilości té dwie beziſtotné, dlá znaków przed ſobą przeciwnych +, i —, niſzczy iedna drugą w działaniach, których té Warunki wyciągaią. I tak ſumma tych dwóch ilości $5 + \sqrt{-1}$, i $5 - \sqrt{-1}$, ieſt ta ſama, co i ſumma dwóch ilości 5, i 5, albo 10, ponieważ ilość $\sqrt{-1}$, ráz przydaná do 5, a drugi ráz od 5 odiętá, żadnéy w powyżſzéy ſummie odmiany nie ſprawuie.

Tak

Tak téż w Wieloczynie ze dwóch ilości $5, + \sqrt{-1}$, i $5, - \sqrt{-1}$ dwie części $+5, \sqrt{-1}$, i $-5, \sqrt{-1}$ giną w dodáwaniu, które się czynić powinno dlá otrzymania całégo Wieloczynu, i nie zostaią w nim tylko té dwie ilości 25, i $-(-1)$, toiest $25 + 1 = 26$, gdzie iuż żádné nie wchodzą ilości bezistotné.

2gá. Tén gatunek ilości, które wniyśdź mogą w działania, wynikaiącé z Zadáń bez przyzwoitégo zastanowiénia się wyłożonych, wprowádzá nową różnicę między Zagadniénia piérwszégo i drugiégo stopnia: bo rozwiązania Zadáń piérwszégo stopnia, gdzie Warunki nie zawissy iedné od drugich, zawsze są w jlościach istotnych, gdy tylko samé Zadania zawiéraią ilości istotné: w Zagadniéniach zaś drugiégo stopnia, choćby Warunki iedné od drugich nie zawissy co do wyznaczénia iednégo Warunku przez drugi; często iednak będzie ta między niémi zawissość, co do granic, które iedén, lub więcéy tych Warunków, zakłádaią innym Warunkóm. I tak w przykładzie poprzedzaiącym gdzie summa daná dwóch liczb, była 10, można było za Wieloczyn ich podadź iakąkolwiek liczbę od 0, aż do 25, czyli to cáłkowitą, czyli téż ułómkową, a nawet i niespółmierną, ale granicą tego Wieloczynu, była liczba 25, nad którą nié mógł bydź większym.

3cia. Trzeba tu dadź poznać Ucznióm zgodę Jeometryi z Formami Algiebraicznémi. W Jeometryi, aby podzielić liniią daną na dwie części, których Prostokąt równálby się kwadratowi innéy linii danéy; wykréślá się na piérwszéy linii, iak na śrzednicy półkolé, (227 Jeom: Część I.) wynosi się od którégokolwiek iéy punktu prostopadłá, równą linii drugiéy danéy, i przez iéy wiérzchołek ciągnie się rowno-odległá od śrzednicy.

Jeżeli ta równo-odległá spotyká gdzie okrąg pół koła; Zagadniénié będzie podobném do Rozwiązania: ieżeli zaś ta równo-odległá nigdzie okręgu nie spotyká; Zagadniénié takié iest do Rozwiązania niepodobném, toiest, drugá liniiá była daná nad to wielká względém piérwszéy, a dokładniéy mówiąc daná była większá, niżeli połowa piérwszéy linii. Jeometryá więc oznácza niepodobiéństwo Zagadniénia przez nieprzecinanié się tych liniy, któréby się przeciąć powinny, gdyby Zagadniénié nie było niepodobném. Algiebra zaś okazuie to niepodobiéństwo, przez wsuniénié się ilości bezistotnych, czyli piérwiástków kwadratowych z jlości uiémnych.

4ta. Gdyby podobná było wystawić sobié iakikolwiek obráz ilości $\sqrt{-1}$; tedyby podobnie możná sobie wyobrazić i każdą inną ilość bezistotną *np.* $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ i t. d.

Jakoż $-2 = 2 \times -1$. Więc $\sqrt{-2} = \sqrt{2} \times \sqrt{-1}$.

I znowu $-3=3\times-1$; Więc $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$.
. . . . . $-4=4\times-1$, Więc $\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}$.

5ta. W tém ieszcze Algiebra i Jeometryá odpowiedaią sobie, że w Jeometrycznéin wykréśléniu *np.* Zadania poprzedzaiącégo, gdy bok kwadratu, (któremu má bydź równy prostokąt dwóch części szukanych, linii danéy) mnieyszy ieśt niż połowa téy linii; wtedy równo-odległá ciągnioná przez koniec tego boku, przeciná we dwóch punktach okrąg półkoła; i prostopadłé spuszczoné do średnicy, od dwóch punktów przecięcia, wyznáczaią na téyże średnicy czyli linii danéy dwa punkta, z których równie iedén iak i drugi, czyni zadosyć Zagadniéniu. W tym razie, odległości tych dwóch punktów od środka koła, i od linii danéy do podzieléńia są równé, i różnią się tylko odmiénnéin swoiém położéniém. W Algiebrze zaś to dwoisté rozwiązanié, (na które dotąd nie uważaliśmy) czyli dwoisté czyniénié zadosyć Zagadniéniu oznácza się przez dwoistą ważność, którą má zawsze Piérwiástek kwadratowy iakiéy liczby: a ta dwoistá ważność nie różni się iedna od drugiéy, tylko samym znakiém, który ią poprzedzá. Jakoż że tak $+1$, iak -1, má za kwadrát $+1$, więc téż wzaiémnie piérwiástek kwadratowy ilości $+1$, będzie równie $+1$, iak i -1; A ogólnie mówiąc, piérwiástek kwadratowy ilości aa, ieśt $+a$, albo $-a$.

I tak w przykładzie poprzedzaiącym, przyszedłszy do Równania $dd=ss-p$, możná z niégo wyprowadzić dwoistą ważność ilości d: i będzie d, albo $=+\sqrt{(ss-p)}$, albo $=-\sqrt{(ss-p)}$, i co razém tak się oznácza $d=\pm\sqrt{(ss-p)}$. A ztąd wypadną dwie części szukané $s\pm\sqrt{(ss-p)}$, i $s\mp\sqrt{(ss-p)}$: toiest, gdy iednéy będzie ważność $s+\sqrt{(ss-p)}$, będzie ważność drugiéy, $s-\sqrt{(ss-p)}$; a gdy piérwszá waży $s-\sqrt{(ss-p)}$, drugá ważyć będzie $s+\sqrt{(ss-p)}$, tak dalece, że równié tak piérwszá, iak i drugá z tych ważności może bydź wziętá za mnieyszą lub za większą: iako się to niżéy oczywiście pokáże *np.* §. 163.

Gdy ieśt $p=ss$, wtedy ilość piérwiástkowá niknie, i iedno tylko Rozwiązanié będzie Zadania: bo tak iedna, iak i drugá szukaná część będzie $=s$: co także zgádza się z Jeometryą. W tym albowiém razie, równo-odległá od średnicy koła ciągnioná przez wiérzch prostopadłéy, do téyże średnicy, spotká okrąg w iednym tylko punkcie, i będzie styczną okręgu koła.

Ta dwoistość w Rozwiązaniu przydaie znowu różnicę między Zagadniéniami piérwszégo i drugiégo stopnia: w Zagadniéniach piérwszych gdy tylko są wyznaczoné, iedno ieśt Rozwiązanié, w drugich zaś są dwa zawsze Rozwiązania.

Trzeba

Trzeba to przyſtoſować do niektórych Zagadnień poprzedzaiących: które *oddzielnie*, (abſtracte) brané, dwa zawſze maią rozwiązania.

Przykład. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby podwóyną drugiéy, a Wieloczyn ich 32.

Kwadrát mnieyſzéy ieſt . . . . 16.
Sama przez ſię liczba mnieyſzá . . . . . . ± 4.
. . . . większá . . . . . . ± 8.
Podług piérwſzégo rozwiązania, Wieloczyn $+4$,
przez $+8$ . . . . $+32$.
Podług drugiégo Rozwiązania, Wieloczyn -4,
przez -8, ieſt także . . . . $+32$.

Takié dwoiſté rozwiązanié, może bydź przyſtoſowané i w tym przypádku, gdzie całé równanié dá ſię podzielić przez znak x, ilości niewiadoméy, mnożący wſzyſtkié wyrazy tegoż równania.

Przykład. Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby podwóyną drugiéy, a oráz iedna rozmnożoná przez drugą dałaby tén ſám Wieloczyn, któryby wypádł z rozmnożénia ſummy tych dwóch liczb przez 4.

Mianowanié. Liczby ſzukané . . . . x, i $2x$.
Wieloczyn ich . . . . . $2xx$.
Summa ich . . . . $3x$.

Warunek. $2xx = 12x$.

W tém Równaniu iedna ważność ilości ſzukanéy x, ieſt o: ponieważ położywſzy ią zamiáſt x, będą w ſaméy rzeczy równé ſobie dwie ſtrony tego równania, i tak iedna, iak i drugá będzie $=o$, toieſt, niczému.

Podzieliwſzy to równanié przez x, będzie $2x = 12$, a $1x = 6$. I ta ieſt drugá ważność ilości x.

Tęż ſamę dwoiſtą ważność ilości x, znaleźlibyśmy poſtępuiąc ſobie zwyczaynym ſpoſobém bez dzielénia przez x.

Jakoż ponieważ $2xx = 12x$.
więc $xx = 6x$.
a, $xx - 6x = o$.

Więc dopełniwſzy kwadratu, będzie $xx - 6x + 9 = 9$.

 Wycią-

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy $x - 3 = \pm 3$. a zatém $x = 3 \pm 3 = {6 \atop 0}$. Dwoiſtá wáżność ilości x, tak iak wyżéy. Może ſię komu zdáwać mnieyſzéy wági to dwoiſte rozwiązanié Zagadnién drugiégo ſtopnia, dlá tego, że we wſzyſtkich proſtych a nieſkłádanych Zagadniéniach, któréműmy ſię dotąd zatrudniali, dwoiſté takié rozwiązania nie różniły ſię tylko przez znaki +, i —, które poprzedzaią ilości rozwięzuiącé Zagadniénié: albo téż, że oboięthą ieſt rzeczą wziąść, czy iednę czy drugą znalezioną wáżność ilości niewiadoméy. Wſzakże iednak obáczymy potém takié przykłady, w których té dwoiſté rozwiązania odpowiedaią na Zagadniénié wcale odmiénnie: oſobliwie zaś w Zagadniéniach Jeometrycznych, wzgląd na takié dwoiſté rozwiązania mieć potrzeba.

163. *Zadanié 9. Ználéźć dwie liczby, których ſumma ieſt 12, a ſumma ich kwadratów 74.*

Przez rozumowanié. Widzieliśmy (119), że ſumma kwadratów ilości dwóch, ieſt podwóyná ſummy kwadratów połowy ſummy, i połowy różnicy tychże dwóch ilości. Więc w ninieyſzym przypádku, połowa liczby 74, toieſt 37, równać ſię będzie ſummie kwadratów, połowy ſummy i połowy różnicy dwóch liczb ſzukanych. A że ta połowa ſummy danéy ieſt 6, a kwadrát téy połowy 36, różnica zaś 36, od 37, ieſt 1; więc kwadrát połowy różnicy będzie 1, a zatém i połowa różnicy ieſt téż 1.

Liczby ſzukané $6 + 1$, i $6 - 1$; toieſt 7, i 5.

Algiebr: Mian: Nazwiéymy iednę liczbę . . x.
Będzie drugá . . . . $12 - x$.
Kwadrát piérwſzéy . . . xx.
. . . . 2giéy $144 - 24x + xx$.

Summa kwad: $144 - 24x + 2xx$.

Warunek. $2xx - 24x + 144 = 74$.

Przerábianié. (Wziąwſzy połowę obudwóch ſtrón)

$$xx - 12x + 72 = 37.$$

(Odiąwſzy 37, od obu ſtrón)

$$xx - 12x + 35 = 0.$$

(Dodáwſzy 1, do obu ſtrón, dla uczyniénia piérwſzéy, zupełnym kwadratém) $xx - 12x + 36 = 1$.

(Wy-

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)
$x - 6 = \pm 1$.

Rozwiązanié. $x = 7$, albo $= 5$. $12 - x = 5$, albo 7.

Liczby szukané i tu na przemián idą, i są 5, i 7: ich kwadraty 25, i 49: Summa tych kwadratów 74.

Drugi sposób. Mianowanié. Różnica szukaná dwóch liczb . . $2d$.
Liczby szukané . . . . $6 + d$.
i . . . . $6 - d$.
Kwadraty ich $36 + 12d + dd$.
$36 - 12d + dd$.
Summa kwadr. $72 + 2dd$.

Warunek. $72 + 2dd = 74$.

Przerábianié. (Odjąwszy 72 po obu stronach)
$2dd = 2$.
$dd = 1$.
$d = \pm 1$.

Rozwiązanié. $6 + d = {}^{7}_{5}$; $6 - d = {}^{5}_{7}$; tak iak wyżéy.

Insze przykłady. *Summa dwóch liczb* . . . . 18.
Summa ich kwadratów . . . 170.
Summa dwóch liczb . . . 36.
Summa ich kwadratów . . 698.

Ogólnie. Summa daná dwóch liczb . . . . $2s$.
Summa daná ich kwadratów . . . $2q$.

Mianowanié. Różnica szukaná . . . $2d$.
Liczby szukané . . $s + d$.
i . . $s - d$.
Kwadraty ich . . . . . . $ss + 2ds + dd$.
i . . . . $ss - 2ds + dd$.
Summa kwadratów . . . $2ss + 2dd$.

Warunek. $2ss + 2dd = 2q$.

Przerábianié. $ff + dd = q$.
(Odiąwſzy ff po obu ſtronach)
$dd = q - ff$.
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)
$d = \pm \sqrt{(q - ff)}$.

Rozwiązanié. $f + d = f \pm \sqrt{(q - ff)}$.
$f - d = f \mp \sqrt{(q - ff)}$.

Spráwdzenié. $ff + 2df + dd = q \pm 2f\sqrt{(q - ff)}$.
$ff - 2df + dd = q \mp 2f\sqrt{(q - ff)}$.
$2ff \quad + 2dd = 2q$.

164. *Uwági.* *1wſzá.* To wyrażénié $\sqrt{(q - ff)}$ oznácza ilość iſtotną, wtedy tylko, gdy $q - ff$, ieſt ilością przydayną: a zatém gdy q, nie ieſt mnieyſzé od ff. Gdy $ff = q$, wtedy $q - ff = o$, a zatém $\sqrt{(q - ff)} = \sqrt{o} = o$. Gdy nakoniec ff, ieſt większé niż q, wtedy $q - ff$, będzie ilością niémną, a $\sqrt{(q - ff)}$, będzie ilością beziſtotną. Stąd wyniká, iż náymnieyſzá ważność ſummy danéy dwóch kwadratów taká tylko bydź może, aby iéy połowa równała ſię kwadratowi połowy ſummy danéy dwóch liczb: toieſt, ſumma daná dwóch kwadratów nie powinna bydź mnieyſzá, niż połowa kwadratu ſummy dwóch liczb. W przypádku téy równości dwie liczby których ſzukámy będą równé: co ſię zupełnie zgádzá z rozumowaniém Arytmetyczném.

2gá. Tymże ſamym ſpoſobém poſtąpilibyśmy ſobie, gdyby daná była różnica dwóch ilości, i ſumma ich kwadrátów. W takim razie w równaniu powyżſzém ogólném, $2ff + 2dd = 2q$, ilość f, byłaby niewiadomą, i równałaby ſię ilości naſtępuiącéy $\sqrt{(q - dd)}$.

3ciá. Gdy ieſt $q = dd$, toieſt, gdy q, má ważność iaką tylko mieć może náymnieyſzą, wtedy dwie ſzukané ilości ſą $+ d$, i $- d$.

165. *Zadanié 10. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt ſumma, i ſumma ſummy ich kwadratów i Wieloczynu.*

166. *Zadanié 11. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt różnica, i ſumma ſummy ich kwadratów, i Wieloczynu.*

167. *Zadanié 12. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt ſumma, i Nadmiár ſummy ich kwadratów, nad ich Wieloczyn.*

168. *Zadanié 13. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt różnica, i nadmiár ſummy ich kwadratów nad ich Wieloczyn.*

169. *Zadanié 14. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt różnica, i ſumma ich Wieloczynu, i różnicy ich kwadratów.*

Po wyłożonych Zagadniéniach poprzedzaiących, té oſtatnié żadnéy trudności ſprawić nie powinny.

170. *Zadanié 15. Znaléźć dwie liczby, których wiémy Wieloczyn, i ſummę ich kwadratów.*

Arytmetycznie. Ponieważ dany ieſt, tych dwóch liczb Wieloczyn; będzie więc wiadomy ténże Wieloczyn podwoiony: a zatém wiedzieć będziemy tak ſummę, iak i różnicę ſummy danéy kwadratów, i tego podwóynégo Wieloczynu. Że zaś ta ſumma, i ta różnica nie czém innéin ieſt, tylko piérwſzá kwadratém ſummy, a drugá kwadratém różnicy dwóch liczb ſzukanych; więc téż ſumma i różnica dwóch liczb ſzukanych daná będzie: a zatém daná ieſt tak iedna, iak i drugá liczba.

Algiebraicznie. Liczby ſzukané . . . . . . x, i y.
Summa daná kwadratów . . . . q.
Wieloczyn dany . . . . p.

Warunek. $\begin{cases} xx + yy = q. \\ xy = p. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} xx + yy = q. \\ 2xy = 2p. \end{cases}$

(Dodáwſzy i odiąwſzy té dwa równania, będzie)

$$\begin{cases} xx + 2xy + yy = q + 2p. \\ xx - 2xy + yy = q - 2p. \end{cases}$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{(q + 2p.)} \\ x - y = \sqrt{(q - 2p.)} \end{cases}$$

(Dodáwſzy, i odiąwſzy)

$$\begin{cases} 2x = \sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p.)} \\ 2y = \sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p.)} \end{cases}$$

$$\text{Więc} \ldots x = \frac{\sqrt{(q + 2p)} + \sqrt{(q - 2p.)}}{2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{(q + 2p)} - \sqrt{(q - 2p.)}}{2}.$$

Spráwdz:

Sprawdz: $xx = \frac{2q + 2\sqrt{(qq - 4pp)}}{4}$.

$yy = \frac{2q - 2\sqrt{(qq - 4pp)}}{4}$.

$xx + yy = \frac{4q}{4} = q$.

$xy = \frac{(q + 2p) - (q - 2p)}{4} = \frac{4p}{4} = p$.

171. *Uwaga.* Granice náymnieyſzéy wáżności, którą mieć może ilość q, ſą wtedy gdy q, dwa razy tylé oznácza ilé p: i w takim razie dwie liczby ſzukané ſą równé, i wyráżá ſię tak iedna iako i drugá przez $\frac{\sqrt{(q + 2p)}}{2}$.

Przykład. Niech będzie 1. $q = 145$.
$p = 72$.
2. $q = 346$.
$p = 165$.
3. $q = 530$.
$p = 247$ (*).

172. *Zadanie 16. Znaléźć dwie ilości, z których iedney ráz wziętéy, a drugiéy dwa razy wziętéy wiémy ſummę: i wiémy także ſummę ich kwadratów.*

Niech będzie $ſ$, ſummą iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy: niech p, będzie ſummą kwadratów ilości dwóch ſzukanych. Jakiéż będą té ilości?

Mianowanie. Niech x oznácza drugą ilość ſzukaną, będzie $ſ - 2x$ piérwſzą ilością.

Kwadraty tych ilości ſą $\begin{cases} \ldots\ xx. \\ ſſ - 4ſx + 4xx. \end{cases}$

Summa tych dwóch kw: $ſſ - 4ſx + 5xx$.

Warunek. $ſſ - 4ſx + 5xx = p$.

Prze-

(*) Gdyby Nauczyciel oſądził, iż Uczniowie iego nie ſą ieſzcze w ſtanie rozwiązania ogólnie tego Zagadnienia, i naſtępuiących, które także w ogólności po-

Przeráb: (Podzieliwszy przez 5 obie strony)

$$xx - \frac{4sx}{5} + \tfrac{1}{5}ss = \tfrac{1}{5}p.$$

(Dopełniwszy kwadratu)

$$xx - \tfrac{4}{5}sx + \tfrac{4}{25}ss = \tfrac{1}{5}p - \tfrac{1}{25}ss = \frac{5p - ss}{25}.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$x - \tfrac{2}{5}s = \pm \frac{\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Rozwiązanié. $x = \frac{2s \pm \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$

$$s - 2x = s - \frac{4s \pm 2\sqrt{(5p - ss)}}{5} = \frac{s \mp 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}$$

Spráwdz: $xx = \frac{4ss \pm 4s\sqrt{(5p - ss)} + (5p - ss)}{25}.$

$$= \frac{3ss + 5p \pm 4s\sqrt{(5p - ss)}}{25}.$$

$$ss - 4sx + 4xx = \frac{ss \mp 4s\sqrt{(5p - ss)} + 4(5p - ss)}{25}.$$

$$= \frac{-3ss + 20p \mp 4s\sqrt{(5p - ss)}}{25}.$$

$$ss - 4sx + 5xx = \frac{25p}{25} = p.$$

Granice. Aby $\sqrt{(5p - ss)}$, był ilością istotną, trzeba żeby $5p$, nie było mnieysze od ss: toiest, náymnieysza ważność summy danéy kwadratów,

dané będą; tedy stosuiąc się do poiętności tychże Uczniów, zadáwać im piérwéy może szczególné przykłady, postępuiąc zawsze, od łatwieyszych, do mniéy łatwych, i zawilszych.

ilości dwóch szukanych iest tá, którá się równá $\frac{1}{5}$ kwadratu summy iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. W takim razié drugá ilość bedzie dwa razy tak wielká iak piérwszá.

Przykłád. Niech będzie 15 summą iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. Niech té dwie ilości będą 3, i 6 Summa ich kwadratów 9, i 36, toiest 45, mnieyszą będzie, niż iakákolwiek inna summa kwadratów, któ áby pochodziła z innégo podziáłu.

I tak niechby piérwszá ilość była 5, drugá téż byłaby 5: a summa ich kwadratów $25 + 25 = 50$. większá niż 45. Niechby była piérwszá 1, a drugá 7: summa kwadratów będzie $1 + 49 = 50$.

Ogólnie. Oznaczmy summę daną przez . . . $5a$.
Niech będzie drugá ilość . . . . . $2a$.
piérwszá . . . . . a.
Summa ich kwadratów . . . . . $5aa$.
Niechby była drugá ilość . . . . $2a \pm z$.
będzie piérwszá . . . $a \mp 2z$.

Kwadrát drugiéy . . . $4aa \pm 4az + zz$.
Kwadrát piérwszéy . . $aa \mp 4az + 4zz$.

Summa kwadratów . . $5aa \quad + 5zz$ Którá to summa przewyższá ilość $5aa$, ilością zawsze przydayną $5zz$.

173. *Uwága.* Gdy to Zagadnienié iest do rozwiązania podobném, toiest, gdy p, iest większé niż $\frac{1}{5}ss$, w takim razie dwoisté má rozwiązanié.

Podług piérwszégo będą dwie ilości

$$\frac{2s + \sqrt{(5p - ss)}}{5}, \text{ i } \frac{s - 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Podług drugiégo będą dwie ilości

$$\frac{2s - \sqrt{(5p - ss)}}{5}, \text{ i } \frac{s + 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Przykłád. Niech będzie . . . $s = 30$.
$p = 185$.
Podług piérwszégo rozwiązania, wypadnie 13, i 4.
Podług drugiégo . . . . 11, i 8.

$13^2 = 169.$ $\quad 11^2 = 121.$
$4^2 = 16.$ $\quad 8^2 = 64.$

Summma . . . 185. Summa 185.

Inſzé przykłady. $ſ = 45$; $ſ = 60$; $ſ = 100$.
$p = 410$; $p = 725$; $p = 2005$.

174. Aby Zagadniénié to rozwiązać przez rozumowanié, zdaie ſię, iż trzeba do tego zaciągnąć pomocy z Jeometryi.

Niech liniiá AB, wyſtáwiá nám ſummę daną iednéy ilości ráz wziętéy, i drugiéy dwa razy wziętéy. Niech liniiá AX, wyráżá piérwſzą z ilości ſzukanych: a niech BX, wyráżá drugą ilość dwa razy wziętą. Niech będzie AC, proſtopadłá do AB, i równá iéy połowie. Pociągniymy BC, a od X, wynieśmy XZ, proſtopadłą do AB, aż do iéy ſpotkania ſię w punkcie Z, z liniią BC. Poprowadźmy do Z, liniią AZ: liniiá XZ, będzie połową linii BX, toieſt, będzie drugą liniią ſzukaną: kwadrát zaś linii AZ, wyſtawi nám ſummę daną kwadratów. Aby więc znaléźć dwa punkta X, i Z, trzeba od punktu A, iak od śrzodka promiéniém równym linii, któréy kwadrát równáłby ſię ſummie dwóch kwadratów danych, nakréślić koło, którégo okrąg przecináłby (ieżeli to bydź może) w punkcie Z, liniią BC, i ſpuścić potém od tego punktu proſtopadłą ZX. Fig. 31.

Aby Zagadniénié to było do rozwiązania podobném, okrąg koła powinién ſpotkać liniią BC: a zatém náymnieyſzá ważność ſummy danéy dwóch kwadratów będzie wtedy, gdy bok kwadratu równégo téy ſummie równá ſię proſtopadłéy AD, ſpuſzczonéy od punktu A, na liniią BC: a ſpuściwſzy DE, proſtopadłą do AB, linie AE, i DE, będą liniiami ſzukanémi. W tym razie $DE = 2AE$.

Jakoż . . $BD : CD = AB^2 : AC^2 = 4 : 1$.
A że . . $BD : CD = BE : AE$.
Więc . . $BE = 4AE$.
a . . . . $DE = 2AE$.
I znowu $BC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$.
albo $5AC^2 : AC^2 = AB^2 : AD^2$.
więc $AD^2 = \frac{1}{5}AB^2 = \frac{1}{5}ſ$.

Gdy liniiá AZ, większá ieſt niż AD, wtedy koło przecina liniią BC, we dwóch punktach równie-odległych od punktu D.

Niechby *np.* było $AZ^2 = p$.

$$\text{będzie} \quad DZ^2 = p - \tfrac{1}{5}ss = \frac{5p - ss}{5}.$$

$$\text{A że ieſt} \quad DZ^2 : EX^2 = BC^2 : AB^2 = 5 : 4.$$

$$\text{Więc} \quad EX^2 = \tfrac{4}{5} DZ^2 = \tfrac{4}{25}(5p - ss).$$

$$\text{A zatém} \quad EX = \frac{2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$AX = AE + EX = \frac{s + 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$BX = BE - EX = \frac{4s - 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$EX' = \frac{2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$AX' = AE - EX = \frac{s - 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$BX' = BE + EX' = \frac{4s + 2\sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$ZX = \frac{2s - \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

$$Z'X' = \frac{2s + \sqrt{(5p - ss)}}{5}.$$

Wſzyſtko to zgádzá ſię z poſtępowaniém Algiebraiczném, wyżéy użytém.

175. *Uwága.* Kiedykolwiek liniiá AZ, nie ieſt większá od AB, wtedy iedén z punktów przecięcia Z, ieſt między punktami B, i C: a zatém iedén z punktów przecięcia X. ieſt między punktami A, i B. W takim więc razie iedno przynáymniéy rozwiązanié ieſt przydayném.

Gdy nie tylko liniiá AZ, nie ieſt większá od AB, ale nawet ani od AC, wtedy obadwa rozwiązania będą przydaynémi.

Gdy liniiá AZ, nie ieſt większá od AB, ieſt iednak większá od AC; wtedy iedno rozwiązanié będzie przydayném: w drugim zaś rozwiązaniu będzie

dzie ważność linii AX, uiémná: i gdybyśmy w tym razie uważać chcieli AX, iak ilość przydayną, tedy AB, byłaby nie summą, ale nadmiarém iednéy ilości dwa razy wziętéy, nad drugą ráz wziętą.

Nakoniec ieżeli liniiá AZ, większá iest od AB, w takim razie obadwa punkta Z, Z', leżą nie na saméy linii BC, ale na iéy przedłużéniu: a zatém też i punkta X, X', znaydować się będą na przedłużéniu linii AB, i tak iedno, iak i drugié rozwiązanié zawiérá w sobie ilości uiémné.

W piérwszém rozwiązaniu liniiá AB, będzie Nadmiarém iednéy ilości ráz wziętéy nad drugą, dwa razy wziętą: w drugim rozwiązaniu, liniiá AB, będzie Nadmiarém drugiéy ilości dwa razy wziętéy, nad piérwszą ráz wziętą.

Té wnioski wyprowadzoné z wykréśléniá Jeometrycznégo zgádzaią się zupełnie z wnioskami, któré wyprowadzić można z Form ogólnych Algiebraicznych.

Jakoż aby ilość $s - 2\sqrt{(5p - ss)}$ byłaby przydayną, trzeba, aby s, nie było mnieyszé od $2\sqrt{(5p - ss)}$: toiest ss, nie powinno bydź mnieyszé od $4(5p - ss)$: a zatém $5ss$, nie powinno bydź mnieyszé od $20p$: albo ieszcze ss, nie powinno bydź mnieyszé od $4p$: a nakoniec p, nie powinno bydź większé od $\frac{1}{4}ss$, czyli AZ, nie powinna bydź większá od AC.

I znowu aby ilość $2s - \sqrt{(5p - ss)}$, była przydayną, trzeba, aby $2s$, nie było mnieyszé od $\sqrt{(5p - ss)}$: toiest $4ss$, nie powinno bydź mnieyszé, niż $5p - ss$, czyli $5ss$, nie powinno bydź mnieyszé od $5p$, albo ss, nie powinno bydź mnieyszé od p, albo nakoniec AZ, nie powinna bydź większá od AB.

Inszé przykłady. Znaléźć dwie ilości, których wiadomá iest summa kwadratów, i summa iednéy z nich ráz wziętéy, a drugiéy trzy, cztéry, pięć, sześć, i t. d. razy wziętéy.

76. *Zadanié 17. Podzielić 100 dwá razy: każdy zaś ráz na dwie liczby tak, aby iedna ze dwóch liczb piérwszégo podziáłu, była dwa razy tak wielká, iak iedna ze dwóch liczb drugiégo podziáłu, dwóch zaś liczb pozostałych Wieloczyn, aby był 1792.*

Mianowanié. 1wszá część 2go podziáłu . . . x.
1wszá część 1go podziáłu . . . $2x$.
2gá część 2go podziáłu . . $100 - x$.
2gá część 1go podziáłu . . $100 - 2x$.

Wieloczyn dwóch drugich części $10000 - 300x + 2xx$.

 Wa-

Warunek. $10000 - 300x + 2xx = 1792.$

Przerábianié. (Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2, i położywſzy naprzód wyrazy niewiadomé)

$$xx - 150x + 5000 = 896.$$

(Dlá dopełniénia kwadratu, dodáwſzy 625, do piérwſzéy ſtrony, i do drugiéy)

$$xx - 150x + 5625 = 1521.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr: z obu ſtrón)

$$x - 75 = \pm 39.$$

(Dodáwſzy 75 do obu ſtrón)

$$x = \substack{114 \\ 36}$$

Rozwiązanié. $x = \substack{36 \\ 114}$ $\quad 100 - x = \substack{64 \\ -14}.$

$2x = \substack{72 \\ 228}$ $\quad 100 - 2x = \substack{28 \\ -128}.$

Spráwdzénié. $\begin{cases} 64 \times 28 = 1792. \\ -14 \times -128 = 1792. \end{cases}$

Uwága. Gdyby ſię brały *przydaynie*, (poſitive), drugié części dwóch podziáłów, tedy w tym razie, iuż nie ſumma, alè różnica części ſzukanych byłaby daná.

Przez rozumowanié. To Zadanié może wypaśdź na iedno co i Zadanié 7, któré bardzo łatwo rozwiązało ſię ſpoſobém Arytmetycznym.

Fig 32. Jakoż niech linie równé AB, CD, wyſtawuią nám liczbę 100: a linie AX, BX, CY, DY, niech wyſtawuią liczby ſzukané: toieſt, niech CY, będzie dwa razy tak wielká iak AX. Gdy tedy weźmiemy liniią CE, dwa razy tylą, ilá ieſt AB, będzie téż i liniiá EY, dwa razy tak wielká iak BX: a proſtokąt EY $\times$ DY, będzie dwa razy tak wielki, iak proſtokąt DY $\times$ BX. Że zaś tén drugi proſtokąt waży 1792, więc piérwſzy wáżyć będzie 3584. A że różnica dwóch liniy EY, DY, ieſt wiadomá, bo nią ieſt liniiá DE, którá wyráżá liczbę 100; więc podług Zadania 7, liniie EY, i DY, wáżą, piérwſzá $78 + 50$, drugá $78 - 50$. toieſt 128, i 28. $BX = \frac{1}{2} EY = 64$: $AX = 100 - 64 = 36$: $CY = 100 - 28 = 72$.

Tén ſpoſób poſtępowania, nie zawiſł od równości liniy AB, i CD, a nawet ani od ſtoſunku linii AX, do CY.

Ogólnie. Niech będą dwie liczby dané *a*, *b*: trzeba tak iednę, iak drugą podzielić na dwie części, aby iédna część iednégo podziału, była do ie-

dnéy

dnéy części drugiégo podziału, iak m, do n: Wieloczyn zaś drugiéy części iednégo podziału, przez drugą część drugiégo podziału, aby był równy ilości danéy p.

Mianowanié. Niech będą dwie piérwſzé części . . . mx, i nx.
Dwie drugié części będą . . . . . $a-mx$, i $b-nx$.
Wieloczyn tych dwóch 2gich części $ab-x(an+bm)+mnxx$.

Warunek. $ab-x(an+bm)+mnxx=p$.

Przerób: $mnxx-x(an+bm)+ab=p$.
(Odiąwſzy ab, po obu ſtronach)
$mnxx-x(an+bm)=p-ab$.
(Podzieliwſzy obie ſtrony przez mn)

$$xx-\frac{x(an+bm)}{mn}=\frac{p}{mn}-\frac{ab}{mn}.$$

(Dodáwſzy do obu ſtrón kwadrát ilości $\frac{an+bm}{2mn}$)

$$xx-x\left(\frac{an+bm}{mn}\right)+\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn.}=\frac{p}{mn}+$$

$$\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn}-\frac{ab}{mn}=\frac{p}{mn}+\frac{aann+2abmn+bbmm}{4mmnn}$$

$$-\frac{4abmn}{4mmnn}=\frac{p}{mn}+\frac{aann-2abmn+bbmm}{4mmnn}=\frac{p}{mn}+\left(\frac{an-bm}{2mn}\right)^2=$$

$$\frac{4mnp+(an-bm)^2}{4mmnn.}.$$

$$x-\frac{an+bm}{2mn}=\pm\frac{\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2mn.}.$$

$$x=\frac{an+bm\pm\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2mn}.$$

Rozwiązanié. $mx=\frac{an+bm\pm\sqrt{(4mnp+(an-bm)^2)}}{2n.}$

$nx=$

$$nx = \frac{an + bm \pm \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m.}$$

$$a - mx = \frac{an - bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2n.}$$

$$b - nx = \frac{-an + bm \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m.} =$$

$$\frac{-(an - bm) \mp \sqrt{(4mnp + (an - bm)^2)}}{2m}.$$

$$ab - x(an + bm) + mnxx = \frac{-(an - bm)^2 + (4mnp + (an - bm)^2)}{4mn.} =$$

$$\frac{4mnp}{4mn} = p.$$

Uwága. Do tychże samych Form łatwoby przyśdź możná, postępuiąc sobie przez samo tylko rozumowanié.

Przykłád. Niech będzie tak, iak w Zadaniu szczególném . . . .

$a = 100.$
$b = 100.$
$n = 1.$
$m = 2.$
$p = 1792.$

wypadnie stąd,

$$mx = \frac{300 \pm \sqrt{(8.1792 + 100^2)}}{2} = \frac{300 \pm 156}{2} = 150 \pm 78 = {}^{228}_{72}.$$

$$nx = \frac{300 \pm \sqrt{(8.1792 + 100^2)}}{4} = \frac{300 \pm 156}{4} = 75 \pm 39 = {}^{114}_{36}.$$

Inszé przykłady.

$a = 100.$	$a = 144.$
$b = 120.$	$b = 150.$
$m = 3.$	$m = 5.$
$n = 2.$	$n = 3.$
$p = 1824.$	$p = 5841.$

177. *Zadanié 18. Podzielić tak 100, iak i 180 na dwie części, aby iedna część drugiéy liczby dwa razy była tak wielká, iak iedna część piérwszéy liczby, i aby summa kwadratów dwóch części pozostałych czyniła 9760.*

Mianowanié. Piérwszá część liczby 100 . . . . x.
Drugá część . . . . $100-x$.
Piérwszá część liczby 180. . . . . $2x$.
Drugá część . . . . $180-2x$.

Kwadraty dwóch drugich części $\begin{cases} 10000 - 200x + xx. \\ 32400 - 720x + 4xx. \end{cases}$

Summa . . . . $42400 - 920x + 5xx$.

Warunek $5xx - 920x + 42400 = 9760$.

Przerábianié. (Podzieliwszy obie strony przez 5)

$$xx - 184x + 8480 = 1952.$$

Połóżmy na piérwszéy stronie za trzeci wyráz, kwadrát połowy liczby 184, toiest 92: tym kwadratém będzie 8464: aby zaś mieć tén kwadrát, trzeba odiąć 16 po obu stronach.

$$xx - 184x + 8464 = 1936.$$

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy po obu stronach)

$$x - 92 = \pm 44.$$

(Dodáwszy 92 do obu strón)

$$x = 92 \pm 44 = \begin{matrix} 136 \\ 48 \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x = \begin{matrix} 48. \\ 136. \end{matrix}$ $2x = \begin{matrix} 96. \\ 272. \end{matrix}$

$100 - x = \begin{matrix} 52. \\ -36. \end{matrix}$ $180 - 2x = \begin{matrix} 84 \\ -92. \end{matrix}$

$(100-x)^2 = \begin{matrix} 2704 \\ 1296. \end{matrix}$ $(180-2x)^2 = \begin{matrix} 7056 \\ 8464. \end{matrix}$

Sprawdzénié. $2704 + 7056 = 9760.$
$1296 + 8464 = 9760.$

Uwága. Gdybyśmy brali za przydayné, a nie za uiémné, drugié części, drugiégo rozwiązania; tedy té odpowiedałaby innému Zadaniu, w którém iuż nie summa, ale różnica ich od piérwszych części byłaby daná.

178. Zagadniénié to uważané Jeometrycznie i ogólnie, takby się wyraziło. *Przeciąć dwie liniie dané, iedną i drugą na dwie części, tak, aby stosunek iednéy części iednéy linii, do iednéy części drugiéy linii był dany: i aby summa kwadratów, dwóch drugich części była także daná.*

Rozwiązanié Jeometryczné tego Zadania ogólnie uważanégo służyć nám będzie za przykład, iak mámy sobie postępować, rozwięzuiąc przez rozumowanié, iakiéżkolwiek Zadanié, które kilka szczególnych przypádków może mieć.

Fig. 33. Niech będą AB, i CD, dwie liniie dané, które tak podzielić trzeba, iednę w punkcie X, a drugą w punkcie Y, aby stosunek AX, do CY, był równy danému; i aby summa kwadratów z BX, i z DY, była także równá danéy.

Przypádek pierwszy. Niech liniie AB, i CD, będą do siebie w stosunku danym AX, do CY: będzie więc i stosunek BX, do DY równy témuż stosunkowi: a zatém tén przypádek wychodzi na iedno z Zadaniém 4 tego Rozdziáłu.

Przykłád. Niech będzie AB = 40. / CD = 60. i niech będzie stosunek dany AX, do CY, równy stosunkowi 2, do 3, w którym także są do siebie liniie AB, i CD.

Niech będzie 1573, summą daną dwóch kwadratów.

Ponieważ w tym razie, liniie BX, DY, maią się także do siebie iak 2, do 3; będą więc ich kwadraty, iak 4, do 9: a zatém té kwadraty, i ich summa, będą się miały do siebie, iak liczby 4, 9, i 13: samé zaś kwadraty będą $\frac{4}{13}$, i $\frac{9}{13}$ względém ich summy: toiest iedén będzie 484, a drugi 1089: więc liniie BX, i DY, odpowiadać będą piérwiástkóm kwadratowym liczb 484, i 1089, toiest, liczbóm 22, i 33.

AX = 18. BX = 22.
CY = 27. DY = 33.

Uwága. Wyciągaiąc z liczb 484, i 1089, piérwiástki kwadratowé, możná ié brać przydaynie, lub uiémnie, tak dalece, że liniióm BX, i DY, odpowiadać będą dwie ważności ± 22, ± 33.

Ważności uiémné oznáczaią, że punkta X, i Y, są na liniiach AB, i CD, przedłużonych. W takim razie liniie AX, i CY, większé są od liniy, BX, i DY, liniiami AB, i CD, toiest, ważność linii AX, będzie 62, a ważność linii BX, będzie 93.

Przypá-

Przypádek 2gi. Niech liniiá CD, będzie mnieyſzá od inney linii, którey ſtoſunek do AB, byłby równy ſtoſunkowi danému CY, do AX. Fig. 34.

Niech CE, będzie tą liniią, maiącą do AB, ſtoſunek dany CY, do AX. Niech CF, równá AB, będzie proſtopadłą do CD: poprowádźmy liniią EF. Gdy od punktu Y, wynieſiémy YZ, proſtopadłą do CD, i przecinaiącą w punkcie Z, liniią EF; ſtoſunek linii EY, do linii YZ, równy będzie ſtoſunkowi linii EC, do CF, czyli EC, do AB, albo CY, do AX, albo nakoniec BX, do EY: a zatém YZ, równá ſię linii BX: będzie przeto daná ſumma kwadratów z linii DY, i YZ. Gdy tedy z punktu D, iak od śrzodka, nakréślimy koło promiéniém równym linii, którey kwadrát równáłby ſię ſummie daney dwóch kwadratów, to koło liniią EF, przetnie w punkcie Z, punkt tén Z, będzie wyznaczonym: a zatém i punkt Y, ſpuściwſzy proſtopadłą ZY.

Spuśćmy proſtopadłą DG, na EF. Z proporcyi $EF:FC = ED:DG$, wyrachuymy liniią DG. Kwadrát iey oznaczy náymnieyſzą ważność ſummy dwóch kwadratów. Spuśćmy znowu proſtopadłą GH, na CE, i wyrachuymy liniią $DH = \frac{DG^2}{DE}$. Od ſummy daney dwóch kwadratów, odeymiéymy kwadrát DG^2 (mnieyſzy niż ta ſumma) zoſtanie ſię kwadrát $GZ^{2\prime}$, a przez proporcyą $EF^2:EC^2 = GZ^2:HY^2$; znaydziémy HY^2. Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy, znaydziémy ważność linii HY, od którey odiąwſzy DH, zoſtanie ważność linii DY.

Koło wykréślone z punktu D, iak ze śrzodka promieniém DZ, przetnie liniią FG, przedłużoną w punkcie Z′, co dá ważność linii HY′, równey linii HY: do HY′, dodáwſzy DH, będzie DY′, którey odpowiédá ważność linii BX′. Liniie DY′, BX′, ſą uiemné względém teraźnieyſzégo Zadania, w którém ſię kładzie, iż punkta X, i Y, ſą piérwſzy między punktami A, i B, drugi między punktami C, i D. Téż ſamé zaś liniie DY′, i BZ′, rozwiązałyby ſpoſobém przydaynym inſzé Zagadniénié, w którém różnica liniy AX′, BX′, byłaby daná, i w którém także daná byłaby różnica liniy CY′, DY′.

Aby przynaymniey iedno rozwiązanié było przydaynym, trzeba do tego, żeby liniiá DZ nie była większá od linii DF: toieſt, żeby ſumma daná dwóch kwadratów, nie była większá od ſummy kwadratów liniy AB, i CD.

Przykład. Niech będzie AB = 8100.
CD = 6400.
Niech będzie AX do CY, iak 3. do 4.
a zatém CE = 10800.
DE = 4400.
$CE^2 : CF^2 = 16 : 9$. więc $EF^2 : CF^2 = 25 : 9$.
A że $EF^2 : CF^2 = ED^2 : DG^2$.
więc $25 : 9 = 19\ 360\ 000 : DG^2$.
więc $DG^2 = 6\ 969\ 600$.

$$DH = \frac{6\ 969\ 600}{4400} = 1584.$$

Niech będzie ſumma daná kwadratów,
toieſt $DZ^2 = 30\ 009\ 600$.
więc $GZ^2 = 23\ 040\ 000$.
A że $25 : 16 = GZ^2 : HY^2$.
więc $25 : 16 = 23040000 : HY^2$.
(Wyciągnąwſzy ze wſzyſtkich wyrazów piérwiáſtek)
będzie $5 : 4 = 4800 : XY$.
albo $10 : 8 = 4800 : XY$.
a zatém $HY = HY' = 8 \times 480 = 3840$.
$DY = 3840 - 1584 = 2256$.
$DY' = 3840 + 1584 = 5424$.
$CY = CD - DY = 6400 - 2256 = 4144$.
$CY' = CD + DY' = 6400 + 5424 = 11824$.
$AX = \frac{3}{4} CY = 3108$.
$AX' = \frac{3}{4} CY' = 8868$.
$BX = AB - AX = 8100 - 3108 = 4992$.
$BX' = AX' - AB = 8868 - 8100 = 768$.

Fig. 35. *Przypádek 3ci.* Niech będzie liniiá CD, większá niż inná liniiá, którey ſtoſunek do AB, równałby ſię ſtoſunkowi danému CY, do AX.

Niech będzie CE, tą liniią, która do AB, má ſtoſunek dany CY, do AX. Niech będzie CF, proſtopadłá do CD, i równá linii AB. Poprowádźmy EF, a od punktu D, iak od śrzodka promiéniém równym linii, którey kwadrát równałby ſię ſummie danéy kwadratów, nakréślmy koło, któréby przecięło w punktach Z, Z', liniią EF. Niech będą ZY, Z'Y', proſtopadłé do CD: linie CY, DY, i CY', DY', wzięté na linii CD, zadoſyć

uczy-

uczynią zagadnieniu: tym zaś liniióm odpowiadać będą, na linii AB, liniie AX, (równá linii ZY,) BX: i AX′ (równá linii Z′Y′) BX′.

Co do rachunku: niech będzie DG, prostopadłá do FE: oznaczy ona náymnieyszą ważność linii DZ: niech znowu będzie GH, prostopadłá do CD.

Wyrachowáwszy liniią GD, z proporcyi $EF:FC=ED:GD$. znaydziémy ważność linii $DH=\frac{DG^2}{ED}$. W troykącie DGZ, którégo wiadomá iest przeciwprostokątná DZ, i iedén bok DG, wyrachuiémy GZ^2. Z proporcyi $EF^2:EC^2=GZ^2:HY^2$, będzie możná wyrachować HY^2: a zatém i HY, któréy równá się HY′. Dodaiąc, i odeymuiąc DH, znaydziémy DY, i DY′.

Przykład. Niech będzie $AB=156$. $CD=328$. i niech będzie stosunek dany AX, do CY, równy stosunkowi 3, do 5.

A że iest $3:5=156:260$; więc $CE=260$; a zatém $DE=68$.

Trzy ilości EF^2, EC^2, CF^2, są do siebie iak liczby, 34, 25, 9: A że $EF^2:FC^2=DE^2:DG^2$; więc $34:9=68^2:DG^2$; a zatém $DG^2=1224$, a $DH=\frac{1224}{68}=18$.

Náymnieyszá tedy ważność DZ^2, iest 1224. Niechby było $DZ^2=50320$, więc $GZ^2=50320-1224=49096$. A że $34:25=49096:HY^2$, więc $HY=190$.

$DY=HY+HD=190+18=208$. $DY'=HY'-HD=190-18=172$.

$CY=120$. $AX=72$. $BX=84$.

$CY'=500$. $AX'=300$. $BX'=144$.

Drugié rozwiązania, odpowiedaią różnicy danéy, ilości szukanych, a nie ich summie.

Niech będzie DL, prostopadłá do CD, i spotykaiącá FE w L. Jeżeli DZ, iest dáná mnieyszá, niż DL, tedy dwa punkta przecięcia Y, Y′, przypádaią między C, i D, a zatém dwie ważności liniy wziętych na CD, są przydayné. W tym przypádku ieżeli DL, większá iest od DE, tedy dwa rozwiązania względém linii AB, są uiemné; ponieważ w tym razie liniie ZY, Z′Y′, będą miały położénia swoie z téy saméy strony liniy CD, z któréy iest liniá Y′Z′. Ale ieżeli w tymże przypádku, liniiá DL, iest mnieyszá od DE, tedy iedno rozwiązanié, względém linii AB, będzie przydayné.

Wſzyſtkié té przypádki można obiaśnić, na przykładach liczebnych.

Nakoniec podług wykréślénia poprzedzaiącégo, można uſtanowić formę ogólną.

Niech będzie $AB = a$.

$DC = b$.

Niech będzie ſtoſunek dany AX, do CY, równy ſtoſunkowi AB, do CE, i niech będzie $CE = c$.

$DE = b - c$. (w trzecim przypádku)

$EF^2 : CF^2 = DE^2 : DG^2$.

czyli $aa + cc : aa = (b-c)^2 : DG^2 = \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2$.

$$DH = \frac{DG^2}{DE} = \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2 : (b-c) = \frac{aa}{aa+cc}(b-c).$$

Niech będzie $DZ^2 = q$.

$$GZ^2 = q - \frac{aa}{aa+cc}(b-c)^2 = \frac{q(aa+cc) - aa(b-c)^2}{aa+cc}.$$

A że, $aa+cc : cc = \frac{q(aa+cc) - aa(b-c)^2}{aa+cc} : HY^2$.

$$\text{Więc } HY = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)}.$$

$$DY = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)} + \frac{aa}{aa+cc}(b-c)$$

$$DY' = \frac{c}{aa+cc}\sqrt{(q(aa+cc) - aa(b-c)^2)} - \frac{aa}{aa+cc}(b-c)$$

Stąd łatwo iuż będzie, i inſzych ilości ważność oznaczyć.

179. *Zadanié 19. Proſtokąt pewny, má dwa razy tak wielką długość, iak ſzérokość. Gdy do każdégo boku iego dodámy po iednéy ſtopie, powiérzchniá zawiérać w ſobie będzie ſtóp kwadr: 120.*

Mianowanié. 1wſzá ſzérokość . . . x.

1wſzá długość . . $2x$.

2gá szérokość . . . . . $x+1$.
2ga długość . . . . . $2x+1$.

2gá powiérzchniá . . $2xx+3x+1$.

Warunek. $2xx+3x+1=120$.

Przerábianié. (Odiąwszy 1 po obu stronach)
$2xx+3x=119$.
(Podzieliwszy obie strony przez 2)
$xx+\frac{3}{2}x=59\frac{1}{2}$.
Połowa Spółczynnika drugiégo wyrazu, iest $\frac{3}{4}$, *kwadrát* $\frac{9}{16}$.
(Dodáwszy $\frac{9}{16}$ do obu strón)
$xx+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=59\frac{1}{2}+\frac{9}{16}=60\frac{1}{16}=\frac{961}{16}$.
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)
$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{31}{4}$.
(Odiąwszy $\frac{3}{4}$ po obu stronach)

$$x=\begin{matrix}\frac{28}{4}\\-\frac{34}{4}\end{matrix}=\begin{matrix}7.\\-8\frac{1}{2}.\end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x=\begin{matrix}7.\\-8\frac{1}{2}.\end{matrix}$

$2x=\begin{matrix}14.\\-17.\end{matrix}$

$x+1=\begin{matrix}8.\\-7\frac{1}{2}.\end{matrix}$

$2x+1=\begin{matrix}15.\\-16.\end{matrix}$

Sprawdzénié. $8\times15=120$.
$-16\times-7\frac{1}{2}=120$.

Uwága. Gdyby w drugim rozwiązaniu, brały się wyrazy przydaynie, tedy takowé rozwiązanié odpowiedałoby następuiącému Zadaniu: *Znaléźć Prostokąt, którégo ieden bok, dwa razy iest tak wielki, iak drugi, i którégo powiérzchniá, odiąwszy od każdégo boku po 1 stopie, byłaby 120 stóp kwadratowych.*

Rozwią-

Rozwiązanié tego Zagadniénia, mogłoby téż bydź przywiedzionéın przez rozumowanié, do 7 Zadania tego Rozdziału.

Fig. 36. Niech będzie AXYZ, Prostokąt szukany, którégo długość AX, dwa razy iest tak wielká, iak szérokość AZ. Niech równé liniie AD, BY, dodané do boków tego prostokąta wystawuią nám długość iednéy stopy, i niech po tém dodaniu powiérzchniá prostokąta DXBC, będzie 120 stóp kwadr:

Powiérzchniá tego prostokąta, zmnieyszoná kwadratém CZ, zawiérá 119 stóp kwadr. Ta powiérzchniá tak zmnieyszoná, skłádá się z piérwszégo Prostokąta AXYZ, i ze dwóch prostokątów DZ, BZ, iednakiéy szérokości; a długość drugiégo BZ, dwa razy będzie tak wielká, iak długość piérwszégo DZ. Weźmy liniią DE, dwa razy tylą, ilá iest AD, i dopełniymy prostokąta EXYF. Prostokąt DF, równy będzie prostokątowi BZ: a zatém prostokąt EXYF, równy będzie prostokątowi DXBC, zmnieyszonému kwadratém CZ, więc tén prostokąt zawiérá w sobie stóp kw. 119: Prostokąt zaś z linii EX, AX, iako dwa razy tak wielki zawiérać będzie stóp kwadr: 238. A że wiadomá iest różnica liniy EX, AX, toiest, liniiá AE, zawiéraiącá 3 stopy, więc Zadanié wypádá na to samo, co i Zadanié 7 tego Rozdziału.

Insze przykłady. Znaléźć Prostokąt, którégo długość trzy razy tak wielká, iak szérokość; a gdy się dodá po 2 stopy do każdégo boku, powiérzchniá będzie 260 stóp kwadr:

Naiął kto pewną liczbę robotników, z których każdy bierze 4 razy tylé grószy, ilé iest robotników: ténże przybrál drugą razą 3 ieszcze robotników więcéy, i płaci każdému z nich po 2 grosze drożéy, niż piérwszym razém; wydał zaś tą drugą razą na tychże robotników groszy 456.

180. *Uwága.* W Zagadniéniach tego gatunku, częstokroć się przytráfiá, iż dlá uwolniénia ilości niewiadoméy, od spółczynnika, zawiłém się czyni równanié, z przyczyny wprowadzonych ułómków: atoli możná się ich uchronić, mnożąc równanié przez taką ilość, aby spółczynnika kwadratu ilości niewiadoméy, uczynić kwadratém. I tak w równaniu $3xx + 8x + 4 = 260$, (które wypádá z drugiégo przykładu tego Zadania) rozmnożywszy obiedwie strony przez 3, będzie $9xx + 24x + 12 = 780$. Uważaiąc $3x$, iak ilość niewiadomą, czyli piérwszy wyráz piérwiástku kwadratowégo piérwszéy strony tego równania, przywiedzionéy do kwadratu, będzie $24x$, podwóynym wieloczyném drugiégo wyrazu tegoż Piérwiastku rozmnożonégo przez piérwszy wyráz $3x$: albo, (co na iedno wychodzi) będzie $24x$ poiedynczym Wieloczyném tego drugiégo wyrazu, przez $6x$: więc drugi wyráz piérwiástku iest 4. Piérwszą tedy stronę równania przywiéśdź trzeba do tego, aby

była

była kwadratém z $3x+4$, toieſt $9xx+24x+16$: co będzie gdy dodámy 4, do obu ſtrón równania: tak albowiém wypadnie równanié $9xx+24x+16=784$, z którégo wyciągniony piérwiáſtek kwadratowy, będzie $3x+4=28$; (opuściwſzy piérwiáſtek uiémny) a zatém $3x=24$, $1x=8$.

W piérwſzym przykładzie tego Zadánia, rozmnożywſzy przez 2, równanié $2xx+3x=119$; będzie $4xx+6x=238$. Ponieważ zaś piérwſzy wyráz piérwiáſtku piérwſzéy ſtrony, przywiedzionéy do kwadratu, ieſt $2x$; więc drugi wyráz będzie wielorazém, z $6x$, podzielonych przez $4x$; czyli z 6 podzielonych przez 4, który to wieloráz ieſt ułómkowy $\frac{3}{2}$. Gdy dla uchronienia ſię iego, rozmnożymy ieſzcze całé równanié przez kwadrát mianownika tego ułómku, toieſt przez 4, będzie $16xx+24x=952$.

W tém oſtatniém równaniu, ponieważ $4x$, ieſt piérwſzym wyrazém piérwiáſtku piérwſzéy ſtrony, przywiedzionéy do kwadratu; więc wieloráz z 24, podzielonych przez 8, toieſt 3, będzie drugim wyrazém tego piérwiáſtku, i całé równanié przywiedzioné do tego, aby piérwſzá iego ſtrona, była kwadratém, będzie $16xx+24x+9=961$.

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy (przydayny)

$$4x+3=31.$$
$$4x=28.$$
$$1x=7.$$ tak iak wyżéy.

Wſzyſtkié więc ſpółczynniki wyrazów będą cáłkowité, używſzy tego ſpoſobu:

W ogólności. Niech będzie równanié $axx+2bx=p$, które rozwiązać chcémy, chroniąc ſię ułómków w Przerábianiu.

Rozmnożywſzy całé równanié przez a.

będzie $aaxx+2abx=ap$.

Dopełniymy kwadratu, dodáwſzy bb, po obu ſtronach:

będzie $aaxx,+2abx+bb,=ap+bb$.

Wyciągniymy piérwiáſtek kwadratowy.

będzie $ax+b=\pm\sqrt{(ap+bb)}$.

$$ax=\pm\sqrt{(ap+bb)}-b.$$

$$x=\frac{\pm\sqrt{(ap+bb)}-b}{a}.$$

Jeżeli ſpółczynnikiém drugiégo wyrazu byłaby liczba nie párzyſtá c, tedy rozmnożyć trzeba równanié $axx+cx=p$, przez $4a$; i będzie

$$4aaxx+4acx=4ap.$$

Drugi wyráz Piérwiáſtku w piérwſzéy ſtronie równania, którą obrócić mámy na kwadrát, będzie $\frac{4ac}{4a} = c$.

Dopełniwſzy kwadratu, będzie

$$4aaxx + 4acx + cc = cc + 4ap.$$

Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy, będzie

$$2ax + c = \pm\sqrt{(cc + 4ap)}$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{(cc+4ap)} - c}{2a}.$$

181. *Zadanié 20. Proſtokąt pewny má dwa razy tak wielką długość iak ſzerokość. Gdy dodámy iednę ſtopę do iego długości, a odeymiémy iednę ſtopę od iego ſzérokości, powiérzchniá mieć będzie ſtóp kwadratowych 90.*

Miánowanié. 1wſzá ſzérokość . . . . . . x.
1wſzá długość . . . . $2x$.
2gá ſzérokość . . . . $x - 1$.
2gá długość . . . . $2x + 1$.
2gá powiérzchniá . . . . $2xx - 1x - 1$.

Warunek. $2xx - 1x - 1 = 90$.

Przeróbianie. (Dodáwſzy 1 do obu ſtrón)

$$2xx - 1x = 91.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 8.)

$$16xx - 8x = 728.$$

(Dopełniwſzy kwadr: przez dodanié 1)

$$16xx - 8x + 1 = 729.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$4x - 1 = \pm 27.$$

(Dodáwſzy 1 po obu ſtronach)

$$4x = \begin{matrix} 28. \\ -26. \end{matrix}$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 4)

$$x = \begin{matrix} 7. \\ -6\tfrac{1}{2}. \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x = 7$. 1wſzá ſzérokość.
$2x = 14$. 1wſzá długość.

$x - 1 = 6$. 2gá szérokość.
$2x + 1 = 15$. 2gá długość.
$2xx - 1x - 1 = 90$. 2gá powiérzchniá.

Drugié rozwiązanié $x = -6\frac{1}{2}$ uważané przydaynie, wychodzi na to, aby znaléźć prostokąt, którégo długość byłaby dwa razy tak wielká iak szérokość, i do którégo szérokości dodáwszy 1 stopę, a od długości uiąwszy 1 stopę, powiérzchniá mieć będzie 90 stóp kwadratowych.

1wszá szérokość . . . . $6\frac{1}{2}$.
1wszá długość . . . . 13.
2gá szérokość . . . . $7\frac{1}{2}$.
2gá długość . . . . . 12.
2gá powiérzchniá . . . $12 \times 7\frac{1}{2} = 90$.

182. *Uwága.* W każdém zagadnieniu, gdy iuż ráz przywiedzioné iest do równania, tedy potém nie myśli się więcéy o zamiarze, który nám założono w témże zagadniéniu, ale się tylko zatrudniá około rozwiązania równania, w liczbach ogólnié, czyli oddzielnie branych; które to rozwiązanié zdaie się czasém bydź trudném, gdy go przychodzi przystósować do zamiaru wyrażnégo, któryśmy naprzód mieli przed oczyma. I tak w przykładzie poprzedzaiącym, gdyby zagadniénié podané było oddzielnie, tak na przykłád: *Znaléźć dwie liczby, z których iedna byłaby dwa razy tak wielká, iak drugá; i które nadto byłyby takié, że dodáwszy 1, do iednéy, a odiąwszy 1, od drugiéy, wieloczyn byłby 90:* tedy drugié rozwiązanié zachowané uiémnie, odpowiedá tak zupełnie na zadanié, iak i rozwiązanié przydayné.

Toż samo zadanié możná przywieśdź do zadania 7, w sposób następuiący.

Niech będzie prostokąt AXYZ, którégo długość AX, byłaby dwa razy tak wielká, iak szérokość XY. Do długości AX, dodáymy AD, wyrażaiącą iednę stopę, a od szérokości XY, odeymiéymy BY, wyrażaiącą także iednę stopę. Po téy odmianie powiérzchniá prostokąta DXBC, zawiérać będzie stóp kwadr: 90. Dopełniymy kwadratu CZ, który má w sobie iednę stopę kwadratową: Summa prostokątów DZ, AB, mieć będzie stóp kwadr: 91: czyli cały prostokąt DY, mniéy prostokątém BZ, zawiérać będzie stóp kwadratowych 91. A że prostokąt BZ, dwa razy iest tak wielki, iak prostokąt DZ; więc wziąwszy AE, równą AD, i poprowadziwszy EF, równoległą od AZ, prostokąt EY, zawiérać będzie 91 stóp kwadr: więc prostokąt z linii EX, przez liniią AX, (dwa razy tak wielką iak AZ,) zawiérać będzie 182 stóp kwadrat: Że zaś różnica liniy AX, i EX, iest daná w iednéy stopie; więc zagadniénié przywiedliśmy do zadania 7. Fig. 37.

 Insze

Inſzé przykłady. Znaléźć proſtokąt, którégo długość byłaby trzy razy tak wielká, iak ſzérokość: gdy zaś dodámy 2 ſtopy do iego długości, a odeymiémy 3 ſtopy od iego ſzérokości, powiérzchnią mieć będzie 92 ſtóp kwadr.

Znaléźć proſtokąt, którégo długość miałaby ſię do ſzérokości, iak 4 do 3: gdy zaś dodámy do ſzérokości iego ſtóp 2, a odeymiémy od długości ſtóp 3, powiérzchnią będzie 182 ſtóp kwadr.

183. *Zadanié 21. Powiérzchnią pewnégo proſtokąta má ſtóp kwadr: 391. Gdy zaś do każdégo iego boku dodámy po 1 ſtopie, powiérzchnią iego mieć będzie ſtóp kwadr: 432.*

Fig. 38. *Przez rozumowanié* Niech będzie XYZV, proſtokąt ſzukany, którému dodané ſą liniie równé YP, VR, wyrażaiącé 1 ſtopę. Różnica daná dwóch proſtokątów, ieſt 41 ſtóp kwadr. A że ta różnica ſkłádá ſię ze dwóch proſtokątów PZ, RZ, (których ſzérokości ieſt 1 ſtopa, a długość ich równá długości proſtokąta ſzukanégo XYZV) i z kwadratu QZ, który zawiérá 1 ſtopę kwadr: więc ſumma dwóch tych proſtokątów zawierać będzie 40 ſtóp kwadratowych. A że w ſzérokości ſwoiéy maią tylko 1 ſtopę; więc ſumma długości ich będzie 40 ſtóp: a zatém zagadnienié przywiedzioné ieſt do zadania 8; i takby go można wyrazić: *Znaléźć dwie linie, których ſumma ieſt 40 ſtóp, a proſtokąt z nich 391 ſtóp kwadratowych.* Kwadrát połowy różnicy tych liniy ieſt 9, połowa ich różnicy 3, połowa ſummy 20: ſą zatém té linie ſzukané, iedna 17 ſtóp, drugá 23.

Algiebraicznie. Niech będzie 1 bok 1go proſtokąta . . x.

Będzie drugi bok iego . . . . $\frac{391}{x}$.

Jedén bok 2go proſtokąta będzie . . $x+1$.

Drugi bok iego będzie $\frac{432}{x+1}$ albo $\frac{391}{x}+1$.

Warunek. $\frac{391}{x}+1=\frac{432}{x+1}$.

Przeráb: (Przywiódłſzy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{391x+391}{xx+x}+1=\frac{432x}{xx+x}.$$

(Odią-

(Odiąwſzy $391x$ po obu ſtronach od liczników)

$$\frac{391}{xx+x}+1=\frac{41x}{xx+x}.$$

(Obróciwſzy 1, na ułómek)

$$\frac{391+xx+x}{xx+x}=\frac{41x}{xx+x}.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $xx+x$)

$$391+xx+x=41x.$$

(Odiąwſzy $41x$ po obu ſtronach)

$$xx-40x+391=0.$$

(Dodáwſzy 9 do obu ſtrón, aby trzeci wyráz ſtáł ſię kwadratém z 20) $xx-40x+400=9$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$x-20=\pm 3.$$

(Dodáwſzy 20 po obu ſtronach)

$$x=\begin{matrix}23.\\17.\end{matrix}\qquad \frac{391}{x}=\begin{matrix}17.\\23.\end{matrix}$$

Ważność boków, które na przemián przypádaią.

Rozwiązanié. $x=23$. Jedén bok 1go proſtokąta.

$\frac{391}{x}=17$. Drugi bok 1go proſtokąta.

$x+1=24$. Jedén bok 2go proſtokąta.

$\frac{432}{x+1}=18$. Drugi bok 2go proſtokąta.

$\frac{391}{x+1}+1=18$. Drugié wyrażénié tego oſtatniégo boku równé piérwſzému.

184. *Przyſtóſowanié.* Spoſób wyżéy podany przez rozumowanié, ſłuży nie tylko w tym razie, gdy dodania do obudwóch boków ſą równé, ale i w innych.

Przykłád. Znaléźć proſtokąt, którégo powiérzchnia zawiérá 221 ſtóp kw. a dodáwſzy do iednégo boku ſtóp 2, do drugiégo ſtóp 3, zawiérátaby 300 ſtóp kw.

 Niech

Fig. 39. Niech będzie XZ, prostokąt, którego powierzchniá zawiérá 221 stóp kwadr. Niech bokami iego będą linie XY, XV, powiększyymy piérwszą przez YP, oznáczaiącą 3 stopy, drugą przez VR, oznáczaiącą 2 stopy; i niech prostokąt XPQR, zawiérá stóp kwadr: 300. Różnica tych dwóch prostokątów, iest 79 stóp kwadr: A że tę różnicę rozłożyć można na dwa prostokąty PZ, RZ, i na trzeci prostokąt QZ, który zawiérá 6 stóp kwadr: więc summa prostokątów PZ, RZ, zawiérać będzie 73 stóp kwadr: A że znowu té dwa prostokąty rozłożyć można, piérwszy na 3, a drugi na 2 prostokąty iednakowéy szérokości, długość zaś trzech piérwszych, będzie YZ, (bok piérwszégo prostokąta szukanégo), a długość dwóch drugich będzie VZ, (bok drugi tegoż prostokąta); i summa tych 5 prostokątów, równá się iednému takiému, któryby miał szérokość im równą, a długość równą, potróynéy linii YZ, i oráz podwóynéy VZ; więc summa potróynéy YZ, i podwóynéy VZ, czyni 73 stóp.

Niechby liniiá AB, była równá téy summie, niech liniiá AS, wyrážá podwóyną XY, czyli VZ, a liniiá BS, niech wyrážá potróyną YZ, czyli VX.

Ponieważ prostokąt z linii XY, przez YZ, zawiérá 221 stóp kwadr: więc prostokąt z AS, przez BS, sześć razy tak wielki, zawiérać będzie 1326 stóp kwadr: A że summa liniy AS, BS, oznáczá 73 stóp; więc połowa oznaczy $36\frac{1}{2}$ stóp. Kwadrát połowy téy summy iest $1332\frac{1}{4}$, a nadmiár tego kwadratu nad 1326, toiest $6\frac{1}{4}$, czyli $\frac{25}{4}$, będzie kwadratém połowy różnicy, między AS, i BS, a zatém połowa téy różnicy iest $\frac{5}{2}$, czyli $2\frac{1}{2}$.

$$\text{Więc}\quad BS = 36\tfrac{1}{2} \pm 2\tfrac{1}{2} = \begin{matrix}39.\\34.\end{matrix}$$

$$AS = 36\tfrac{1}{2} \mp 2\tfrac{1}{2} = \begin{matrix}34.\\39.\end{matrix}$$

$$\text{A że iest}\ BS = 3YZ;\ \text{więc}\ YZ = \begin{matrix}13.\\11\tfrac{1}{3}.\end{matrix}$$

$$AS = 2XY;\ \text{więc}\ XY = \begin{matrix}17.\\19\tfrac{1}{2}.\end{matrix}$$

Więc w tym razie Zagadnienié má dwa rozwiązania odmienné, tak, iak wyżéy.

Algiebraicznie. Niech będzie bok $XY = x$.

$$YZ = \frac{221}{x}.$$

$$XP = x + 3.$$

$$XP = x + 3.$$

$$XR = \frac{300}{x+3} \text{ albo } \frac{221}{x} + 2.$$

Warunek. $\frac{221}{x} + 2 = \frac{300}{x+3}.$

Przeráb: (Przywiódłſzy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{221x + 663}{xx + 3x} + 2 = \frac{300x}{xx + 3x}.$$

(Odiąwſzy $221x$ po obu ſtronach od Liczników)

$$\frac{663}{xx + 3x} + 2 = \frac{79x}{xx + 3x}.$$

(Obróciwſzy 2 na ułómek)

$$\frac{663 + 2xx + 6x}{xx + 3x} = \frac{79x}{xx + 3x}.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez mianownika)

$$663 + 2xx + 6x = 79x.$$

(Odiąwſzy $79x$ po obu ſtronach)

$$2xx - 73x + 663 = 0.$$

(Rozmnożywſzy wſzyſtko przez 8, dlá uniknienia ułómków)

$$16xx - 584x + 5304 = 0.$$

(Położywſzy za trzeci wyráz kwadrát z 73)

$$16xx - 584x + 5329 = 25.$$

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$$4x - 73 = \pm 5.$$

(Dodáwſzy 73 po obu ſtronach)

$$4x = \begin{matrix} 78. \\ 68. \end{matrix}$$

Więc : : $1x = \begin{matrix} 19\frac{1}{2} \\ 17. \end{matrix}$ tak iak ſię téż wynalazło przez rozumowanié.

Inſzé przykłady. Kupuie kto pewną liczbę łokci materyi, za któré płaci zł. 204. Inną razą kupuie 5 łokci więcéy niż piérwſzą innéy materyi, któréy łokieć płaci 4 złotémi drożéy, niż łokieć piérwſzéy, i zapłacił 352 zł. Iléż łokci kupił, i iaką ceną łokieć tak piérwſzéy, iak i drugiéy materyi?

Naięto

Naięto ráz pewną liczbę robotników, i zapłacono im gr, 432.

Inną razą naięto 3 robotnikami więcéy, i każdému z nich dano 4 gr. więcéy: rozdano zaś dlá wszystkich gr. 594.

Iléż było robotników, i ilé każdému z nich dano?

Uwága. Zadanié następuiącé: *Znaléźć prostokąt, którégo wiadoma iest powiérzchniá, i którégo powiérzchniá wiadomá także będzie, gdy od iego boków odeymiémy długości dané;* to mówię zadanié, wychodzi na poprzedzaiącé, uważaiąc boki drugiégo prostokąta, iakby powiększoné, wtedy gdy się staią bokami piérwszégo prostokąta.

185. *Zadanié 23. Má prostokąt 135 stóp kwadr: w powiérzchni: gdy do iednégo boku iego dodámy iednę stopę, a od drugiégo odeymiémy także 1 stopę, powiérzchniá iego mieć będzie 140 stóp kwadr.*

Algiebraicznie. Mianowanié Niech prostokąta piérwszégo bok iedén będzie . . . . . x.

Drugi będzie . . $\frac{135}{x}$.

Boki drugiégo prostokąta, będą , . . . $x+1$, i $\frac{135}{x} - 1$.

albo . . . . $x+1$, i $\frac{140}{x+1}$.

Warunek. $\frac{140}{x+1} = \frac{135}{x} - 1$.

Przerób: (Przywiódłszy ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{140x}{xx+x} = \frac{135x+135}{xx+x} - 1.$$

(Odiąwszy $135x$ po obu stronach od liczników)

$$\frac{5x}{xx+x} = \frac{135}{xx+x} - 1.$$

(Obróciwszy 1, na ułómek)

$$\frac{5x}{xx+x} = \frac{135 - xx - x}{xx+x}.$$

(Rozmno-

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $xx+x$)

$5x = 135 - xx - x.$

(Dodáwſzy $xx+x$ po obu ſtronach)

$xx + 6x = 135.$

(Dopełniwſzy kwadratu 1wſzéy ſtrony)

$xx + 6x + 9 = 144.$

(Wyciągnąwſzy kwadrát z obu ſtrón)

$x + 3 = \pm 12.$

(Odiąwſzy 3, po obu ſtronach)

$x = \begin{matrix} 9. \\ -15. \end{matrix}$

Rozwiąz: $x = \begin{matrix} 9 \\ -15. \end{matrix}$ Jedén bok 1go proſtokąta.

$\frac{135}{x} = \begin{matrix} 15. \\ -9. \end{matrix}$ Drugi bok 1go proſtokąta.

$x + 1 = \begin{matrix} 10. \\ -14. \end{matrix}$ Jedén bok 2go proſtokąta.

$\frac{140}{x+1} = \begin{matrix} 14. \\ -10. \end{matrix}$ Drugi bok 2go proſtokąta.

Uwága. Wziąwſzy drugié rozwiązanié przydaynie, wypadnie to na iedno co i piérwſzé, ſtą tylko różnicą, że bok, który w piérwſzém rozwiązaniu uwáżaliśmy, iako maiący bydź zmnieyſzonym, w tym razie ma bydź powiękſzonym, i wzaiémnie. Nie zawadzi tu powtórzyć uwágę Zadania 20.

Zadanié to możná przywiéśdź do Zadania 7, tym ſpoſobém. Niech będzie XYVZ, Proſtokąt ſzukany, którégo powiérzchniá zawiérá 135 ſtóp kwadr. Odiąwſzy od boku XY, liniią YP, wyráżaiącą 1 ſtopę, a dodáwſzy do boku XV, liniią VR, wyráżaiącą także iednę ſtopę, proſtokąt XPQR, zawiérać będzie ſtóp kwadr: 140.

Nadmiár drugiégo proſtokąta nad piérwſzy ieſt 5 ſtóp kwadr: a że tym nadmiarém ieſt różnica proſtokątów VQ, PZ; więc ta różnica ieſt 5 ſtóp kwadr: a zatém powiękſzywſzy proſtokąt VQ, kwadratém QZ, różnica proſtokątów RZ, PZ, będzie 6 ſtóp kwadr. A że obadwa té proſtokąty maią w ſzérokości po 1 ſtopie; więc różnica ich długości, toieſt liniy VZ, YZ, będzie 6 ſtóp. Że zaś proſtokąt z tych liniy, ieſt 135 ſtóp kwadr: więc (podług Zadania 7) kwadrát połowy ſummy tych dwóch liniy, ieſt 144 ſtóp kw. Fig. 40.

a ſama połowa ich ſummy 12: będą tedy té dwie linije 12+3, i 12—3, toieſt 15, i 9.

186. *Przyſtóſowanié.* Tén oſtatni ſpoſób poſtępowania, ſłuży nie w tych tylko przypádkach, gdy powiękſzénié iednégo boku równé ieſt zmnieyſzéniu drugiégo boku, ale i w jnnych.

Przykłád. Proſtokątá powiérzchniá má 247 ſtóp kwadr: gdy ſię zaś dodadzą 3 ſtopy do iednégo boku, a odeymą 2 ſtopy od drugiégo, powiérzchniá mieć będzie ſtóp kwadr: 272.

Fig. 41. Niech będzie XYVZ proſtokąt, którégo powiérzchniá má 247 ſtóp kwadr: Od XY, odeymiéymy PY, wyrážaiącą 2 ſtopy, a do XV, dodáymy VR, wyrážaiącą 3 ſtopy. Powiérzchniá proſtokąta PQRX, mieć będzie ſtóp kwadr: 272. Róžnica tych dwóch proſtokątów ieſt 25 ſtóp kwadr. A že tą róžnicą ieſt nadmiár proſtokąta VQ, nad proſtokąt PZ; więc róžnica tych též dwóch proſtokątów, ieſt 25 ſtóp kwadr: a zatém dodáwſzy do proſtokąta VQ, proſtokąt QZ, zawiéraiący 6 ſtóp kwadr: róžnica dwóch proſtokątów RZ, i PZ, będzie 31 ſtóp kwadr: Že zaś piérwſzy z tych proſtokątów rozłožyć možná na inſzé trzy, maiącé 1 ſtopę w ſzérokości, a długości VZ, drugi także proſtokąt rozłožyć možná na dwa inſzé, maiącé 1 ſtopę w ſzérokości, a długość YZ; więc róžnica tych dwóch proſtokątów, równá ſię proſtokątowi, maiącému 1 ſtopę za ſzérokość, a za długość róžnicę między potróyną liniią VZ, i podwóyną YZ: a zatém 3VZ—2YZ=31 ſtóp.

Fig. 42. Niech liniiá BA, oznáczá 31 ſtóp, liniiá zaś BS, niech oznáczá liniią potróyną VZ: liniiá zatém AS, oznáczać będzie podwóyną YZ. Ponieważ proſtokąt z linii VZ, przez YZ, zawiérá 247 ſtóp kwadr: więc proſtokąt 6 razy tak wielki z linii BS, przez AS, zawiérać będzie 1482 ſtóp kwadr: a zatém zagadniénié przywodzi ſię do tego, aby znaléźć dwie ilości AS, i BS, których róžnica ieſt 31, Wieloczyn ich 1482.

Połowa róžnicy ieſt $15\frac{1}{2}$, kwadrát téy połowy $\frac{961}{4}$, kwadrát połowy ſummy, ieſt $\frac{961}{4}+1482=\frac{6889}{4}$.

Połowa więc ſummy $=\pm\frac{83}{2}$.

$$BS = \begin{matrix} 57. \\ -26. \end{matrix} \qquad AS = \begin{matrix} 26. \\ -57. \end{matrix}$$

$$VZ = \tfrac{1}{3}BS = \begin{matrix} 19. \\ -\ 8\tfrac{2}{3}. \end{matrix} \quad YZ = \tfrac{1}{2}AS = \begin{matrix} 13. \\ -28\tfrac{1}{2}. \end{matrix}$$

W drugiém rozwiązaniu wziętém przydaynie trzebaby zamiáſt odięcia 3 ſtóp, przydadź ié do piérwſzégo boku, zamiáſt przydania 2 ſtóp do drugiégo boku, odiąć ié od tegoż boku: i wtedy obadwa rozwiązania, odpowiedać będą na Zadanié uwážané Jeometrycznie. Spo-

Sposób rozwiązania Algiebraiczny, żádnéy nié má trudności.

Inszé przykłady. Kupiec zakupuie pewną liczbę łokci materyi za 1728 zł. 24 łokci bierze na włáſné używanié, a reſztę przedaie za 1800 zł. zyſkuie na łokciu po 3 zł.

Iléż łokci kupił i po czému, ilé ich przedáł i po czému?

Inſzy kupiec zapłacił zł. 1200 za pewną liczbę łokci materyi: gdyby zaś był kupił 16 łokci więcéy materyi, któréy łokieć byłby tańſzy 3 złotémi; tedyby go koſztowała tylko 1152 zł.

Pewná liczba przyiaciół złożyła ſię równie na 432 zł. dwóm z nich wrócili ſkłádkę, inſi pozoſtali, przez co ſkłádka każdégo z tych pozoſtałych powiękſzyła ſię 3 złotémi.

187. *Zadanié 23. Dwa ſą proſtokąty równé, któych ſumma podſtáw wynoſi na 100 ſtóp. Gdyby piérwſzy z nich miáł wyſokość drugiégo; tedyby w powiérzchni ſwoiéy miáł 720 ſtóp kwadr. Gdyby zaś drugi miáł wyſokość piérwſzégo; tedyby w powiérzchni ſwoiéy miáł 320 ſtóp kwadr.*

Algiebraicznie. Podſtawa 1wſzégo proſtokąta . . . x.

2go . . . . . . $100 - x$.

Wyſokość 2go . . . . $\frac{720}{x}$.

Wyſokość 1go . . . . $\frac{320}{100-x}$.

Powiérzchniá 1go . . . . . . $\frac{320x}{100-x}$.

Powiérzchniá 2go . . . . . $\frac{72000 - 720x}{x}$.

Warunek. $\frac{320x}{100 - x} = \frac{72000-720x}{x}$.

Przeráb: (Przywiódłſzy obadwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{320xx}{x(100-x)} = \frac{7200000 - 144000x + 720xx}{x(100-x)}.$$

(Rozmnożywſzy wſzyſtko przez $x(100-x)$)

$$320xx = 7200000 - 144000x + 720xx.$$

 (Po-

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 80)

$4xx = 90000 - 1800x + 9xx.$

(Odiąwſzy $4xx$ od obu ſtrón)

$0 = 90000 - 1800x + 5xx.$

(Podzieliwſzy przez 5, i przełożywſzy)

$xx - 360x + 18000 = 0.$

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$xx - 360x + 32400 = 14400.$

(Wyciągnąwſzy piérwiaſt: kwadr: z obu ſtrón)

$x - 180 = \pm 120.$

(Dodáwſzy 180 po obu ſtronach)

$x = \begin{matrix} 300. \\ 60. \end{matrix} \qquad 100 - x = \begin{matrix} -200. \\ +40. \end{matrix}$

Rozwiązanié. $x = \begin{matrix} 60. \\ 300. \end{matrix}$ Podſtawa 1go proſtokąta.

$100 - x = \begin{matrix} 40. \\ -200. \end{matrix}$ Podſtawa 2go proſtokąta.

$\frac{720}{x} = \begin{matrix} 12 \\ 2\frac{2}{5} \end{matrix}$ Wyſokość 2go proſtokąta.

$\frac{320}{100-x} = \begin{matrix} 8. \\ -1\frac{3}{5}. \end{matrix}$ Wyſokość 1go proſtokąta.

$\frac{320x}{100-x} = \begin{matrix} 60 \times 8 \\ -1\frac{3}{5} \times 300 \end{matrix} = \pm 480.$ Powiérzchnie

$\frac{72000 - 720x}{x} = \begin{matrix} 40 \times 12 \\ -200 \times 2\frac{2}{5} \end{matrix} = \pm 480.$ równé.

Drugié to rozwiązanié brałoby ſię przydaynie, gdyby nie ſumma, ale różnica podſtáw była = 100.

188. *Uwága.* W mianowaniu powyżſzém wyraziwſzy dwie powiérzchnie w takowy kſztáłt $\frac{320 \times x}{100 - x}$, i $\frac{720 \times (100 - x)}{x}$, i przywiódłſzy té dwa ułómki do iednakowégo mianownika, byłoby $\frac{320 \times xx}{x(100-x)}$,

i

i $\frac{720 \times (100-x)^2}{x(100-x)}$: a zatém $320 \times xx = 720 \times (100-x)^2$; a podzieliwszy przez 80; $4 \times xx = 9 \times (100-x)^2$; wyciągnąwszy zaś piérwiástek kwadratowy $2x = 3(100-x)$.

Więc $x : 100 - x = 3 : 2$; toieſt ſtoſunek dwóch podſtáw, równá ſię ſtoſunkowi 3, do 2.

A że ſumma tych podſtáw ieſt 100; więc iedna z nich będzie $\frac{3}{5}$, a drugá $\frac{2}{5}$ ſtu: toieſt 60, i 40: tak iak wyżéy.

Używaiąc proporcyi toż ſamo nám wypadnie z uwág Jeometrycznych.

Niech liniiá AB, wyráżá ſummę daną dwóch podſtáw AX, BX, należących do dwóch proſtokątów równych, których wyſokości BZ, AY; więc AX : BX = BZ : AY. Fig. 43.

Rozmnożywſzy dwa poprzedniki przez BZ, a 2 naſtępniki przez AY.

$AX \times BZ : BX \times AY = BZ^2 : AY^2 = AX^2 : BX^2$.

A że . . . $AX \times BZ = 720 : BX \times AY = 320$;

Więc . . . $720 : 320 = AX^2 : BX^2$.

albo . . . . $9 : 4 = AX^2 : BX^2$.

A zatém . . . $3 : 2 = AX : BX$: tak iak ſię znalazło ſpoſobém Algiebraicznym.

Inſzé przykłady. Dwie oſoby nioſły razém na przedáż 200 iay: powracaią do domu z jednakową ſummą piéniędzy za té iaia przedané. Gdyby zaś iedna z tych oſób przedała była tak drogo każdé iaié iak drugá, a drugá iak piérwſzá; tedy piérwſzéy przypadłoby za nié gr: 180, a drugiéy gr: 80.

Znayduie ſię u kupca pewná liczba ſukna przednieyſzégo, i 90 łokci więcéy nad piérwſzé podleyſzégo: za wſzyſtko to ſukno podleyſzé tylé razém bierze, ilé za przednieyſzé. Gdyby zaś po téy cenie przedáł był ſukno przednieyſzé, po któréy przedáł podleyſzé; i wzaiémnie; tedyby za piérwſzé wziął 900 zł. a za drugié 2500 zł.

189. *Zadanié 24. Dwóch kupców miało razém 10000 zł: zarábiá zaś tak iedén, iak drugi równo, w proporcyi ſwégo kapitáłu; i tylé, że piérwſzy z nich za trzy lata, a drugi za dwa, má 9900 zł. Jakiż był piérwiáſtkowy kapitáł, piérwſzégo z tych kupców, a iaki drugiégo?*

Mianowanié. Kapitáł 1go . . . . . x.
Kapitáł 2go . . . $10000-x$.
Zyſk 1go przez 3 lata . . $9900-x$.

Zyſk 1go przez 1 rok . . $\frac{9900 - x}{3}$.

Zyſk 2go przez 2 lata . . $x - 100$.

Zyſk 2go przez 1 rok . . $\frac{x - 100}{2}$.

Ponieważ zyſki roczné tych dwóch kupców, maią ſię do ſiebie, iak ich kapitały; więc

Warunek. $x : 10000 - x = \frac{9900 - x}{3} : \frac{x - 100}{2}$.

Przerób: (Przywiódłſzy dwa wyrazy drugiégo ſtoſunku, do iednakowégo mianownika)

$x : 10000 - x = 19800 - 2x : 3x - 300$.

(Zrównáwſzy wieloczyn ſkraynych wyrazów, i ſrzednich)

$3xx - 300x = 198000000 - 39800x + 2xx$.

(Odiąwſzy $2xx$ od obu ſtrón)

$xx - 300x = 198000000 - 39800x$.

(Dodáwſzy $39800x$ do obu ſtrón)

$xx + 39500x = 198000000$.

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$xx + 39500x + 390062500 = 588062500$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy)

$x + 19750 = \pm 24250$.

$x = \begin{matrix} 4500 \\ -44000 \end{matrix} = 4500$.

Rozwiązanié. $x = 4500$. Kapitáł 1go kupca.

$10000 - x = 5500$. Kapitáł 2go.

$9900 - x = 5400$. Zyſk 1go przez 3 lata.

$\frac{9900 - x}{3} = 1800$. Zyſk 1go przez rok.

$x - 100 = 4400$. Zyſk 2go przez 2 lata.

$\frac{x - 100}{2} = 2200$. Zyſk 2go przez rok.

Sprawdzénié. $1800 : 2200 = 4500 : 5500$.

Jakoż

Jakoż $1800 = 200 \times 9.$
$2200 = 200 \times 11.$
$4500 = 500 \times 9.$
$5500 = 500 \times 11.$

Albo tak: Niech liniiá A B, wyſtáwiá nám ſummę dwóch kapitałów, toieſt, w przypádku teraźnieyſzym 10000 Zł. Niech liniie równé AD, BC, wyrażaią maiątki dané, iedén na końcu 3 lát, drugi na końcu 2 lát, toieſt 9900 Zł, Liniie DX, CX, wyrażać będą zyſki, w przeciągu tych dwóch czaſów. Fig. 44.

Będzie więc proporcyá.

$DX : CX = 3AX : 2BX.$
a zatém $DX + CX : CX = 3AX + 2BX : 2BX.$
toieſt $CD : CX = 2AB + AX : 2BX.$
Niech będzie $AE = 2AB.$
więc $CD : CX = EX : 2BX.$
albo $2CD : CX = EX : BX.$
więc $2CD : 2CD + CX = EX : EX + BX.$
Niech będzie $2CD = CF.$
więc $2CD : FX 2CD : FX = EX : EB.$

Więc zadanié przywiedliśmy do zadania 7 tgo Rozdziału, tak przedłużaiąc do X, liniią daną EF, aby proſtokątk $EX \times FX$ był dany.

W przykładzie poprzedzaiącym $AC = 100.$
$CE = 20100.$
$CF = 19600 = 2CD.$
Więc $EF = 500.$ Przeciąwſzy EF, na dwie równé części w G;
będzie $FG = 250$; $FG^2 = 62500.$
$EB = 30000.$
$2CD = 19600.$
$2CD \times EB = 588000000.$
$GX^2 = 588000000 + 62500 = 588062500.$
$GX = \sqrt{588062500} = 24250.$
A że $AG = 19750$;
Więc $AX = 4500.$ tak iak wyżéy.

Inſzé przykłady. Dwie oſoby miały razém 120000 Zł: obie iednakowo zyſkuią rocznie w proporcyi ſwoich kapitałów. Jedna zaś z nich na końcu 3 lát, má 70200 Zł. a drugá na końcu 5 lát má 99000 Zł.

Ze dwóch

Ze dwóch osób, iedna má 40000 zł. więcéy niż drugá: obie iednakowo zyskuią rocznie w proporcyi swoich kapitałów: iedna zaś z nich na końcu lát 4, má 217600 zł. drugá na końcu lát pięciu, má 174000 zł.

Przestroga. Zyski na końcu każdégo roku, nie łączą się tu wráz z kapitałami, i tylko piérwiástkowy kapitáł podług rachunku naszégo, zysk sobie proporcyonalny co rok przynosi.

190 *Zadanié 25. Dwóch kupców przedało po sztuce materyi: iedna zaś z tych sztuk miała 5 łokci mniéy niż drugá; wzięli razém za obie té sztuki zł. 1290.*

Kupiec, który przedáł piérwszą materyą, mówi tak do drugiégo: Gdybym był miáł twoię sztukę, i przedáł ią po téy cenie, po któréy przedáłém moię; byłbym wziął za nię zł. 540. Drugi zaś kupiec, mówi tak do piérwszégo: Já gdybym był przedáł twoię sztukę po téy cenie, po któréy przedáłém moię; byłbym wziął za nię zł. 720.

Mian: Liczba łokci 1wszéy materyi . . . . . x.

. . . . 2giéy . . . . $x+5$.

Piérwszy kupiec byłby wziął zł. 540, za łokci $x+5$; więc za 1 łokieć wziął $\frac{540}{x+5}$, a za łokci x, wziął $\frac{540x}{x+5}$.

Drugi kupiec byłby wziął zł. 720, za łokci x; więc za 1 łokieć wziął $\frac{720}{x}$, a za łokci $x+5$, wziął $\frac{720x+3600}{x}$.

Warunek. $\frac{540x}{x+5} + \frac{720x+3600}{x} = 1290.$

Przerób: (Przywiódłszy dwa ułómki do iednakowégo mianownika)

$$\frac{540xx}{x(x+5)} + \frac{720(x+5)^2}{x(x+5)} = 1290.$$

(Rozmnożywszy obie strony przez $x(x+5)$

$$540xx+720(x+5)^2 = 1290xx+6450x.$$

albo $1260xx+7200x+18000 = 1290xx+6450x.$

(Odiąwszy $1260xx$ po obu stronach)

$$7200x+18000 = 30xx+6450x.$$

(Odiąwszy $7200x$ po obu stronach)

$18000 = 30xx - 750x$; albo $30xx - 750x = 18000.$

(Podzie-

(Podzieliwszy przez 30 z obu strón)

$xx - 25x = 600.$

(Rozmnożywszy obie strony przez 4.)

$4xx - 100x = 2400.$

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)

$4xx - 100x + 625 = 3025.$

(Wyciągnąwszy piérwiastek kwadr: po obu stronach)

$2x - 25 = \pm 55.$

(Dodáwszy 25 do obu strón)

$$2x = \begin{matrix} 80. \\ -30. \end{matrix}$$

$$x = \begin{matrix} 40. \\ -15. \end{matrix}$$

Rozwiąz: $x = 40.$ Liczba łokci piérwszéy sztuki.

$x + 5 = 45.$ Liczba łokci drugiéy sztuki.

$\frac{540}{x+5} = 12.$ Cena łokcia piérwszéy sztuki.

$\frac{540x}{x+5} = 480.$ Liczba zł: wziętych od 1go kupca.

$\frac{720}{x} = 18.$ Cena łokcia drugiéy sztuki.

$\frac{720(x+5)}{x} = 810.$ Liczba zł. wziętych od 2go kupca.

Spráwdzénié. $480 + 810 = 1290.$

Inszé przykłady. Sztuka iedna zawiérá w sobie łokci 12 więcéy niż drugá. Za obie sztuki wzięto zł. 1756. Gdyby większą sztukę przedano w cenie sztuki mnieyszéy, przypadłoby za nię zł. 780; a gdyby sztukę mnieyszą, przedano w cenie sztuki większéy, przypadłoby za nię zł. 936.

Dwie sztuki zawiéraią razém łokci 120, i wzięto za nie zł. 1090. Za piérwszą sztukę przedaną w cenie sztuki drugiéy, wziętoby zł. 550. Za drugą sztukę przedaną w cenie sztuki piérwszéy wziętoby 520.

Jedna sztuka zawiérá w sobie 16 łokci więcéy niż drugá, i więcéy też za nię bierze się zł. 432, niż za drugą. Za piérwszą sztukę przedaną w ce-

nie ſztuki drugiéy wzięłoby ſię zł 864, za drugą zaś przedaną po téy cenie iak piérwſzá, wzięłoby ſię zł 960.

Dwie ſztuki zawiéraią w ſobie razém łokci 136, i wzięto za iednę więcéy zł. 192, niż za drugą. Za piérwſzą ſztukę przedaną, w cenie ſztuki drugiéy, wzięłoby zł. 512 Za drugą ſztukę, przedaną w cenie ſztuki piérwſzéy, wzięłoby zł. 864.

191. *Zadanié 26. Znaléźć trzy liczby w proporcyi Arytmetycznéy, których ſumma kwadratów ieſt 200, a kwadrát środniéy przewyżſzá wieloczyn ſkraynych cztéréma iednościami.*

Przez rozum. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, albo kwadrát połowy ſummy dwóch wyrazów ſkraynych, przewyżſzá wieloczyn tychże ſkraynych kwadratém połowy ich różnicy, albo kwadratém różnicy iednégo z tych wyrazu, od wyrazu śrzedniégo: więc kwadrát różnicy naſtępnéy iednégo wyrazu, od drugiégo ieſt 4, a ſama różnica ieſt 2. Summa kwadratów wyrazów dwóch ſkraynych, wyrównywá dwa razy wziętému kwadratowi połowy ich ſummy, z przydaynym kwadratém połowy ich różnicy dwa razy także wziętym: albo podwóynému kwadratowi wyrazu śrzedniégo wráz z kwadratém różnicy naſtępnéy dwa razy wziętym: toieſt wráz z 8. Summa zaś kwadratów liczb trzech, wyrównywá trzy razy wziętému kwadratowi wyrazu śrzedniégo przydáwſzy 8: a zatém kwadrát potróyny wyrazu śrzedniégo, równá ſię liczbie 200, mniéy 8, toieſt 192. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, ieſt trzecią częścią liczby 192, toieſt 64: ſám zaś wyráz śrzedni ieſt 8. Dwa tedy wyrazy ſkrayné będą 8+2, i 8—2; toieſt 10, i 6.

Liczby więc, których ſzukaliśmy ſą: 10, 8, 6: i łatwo możná ſprawdzić, że zadoſyć czynią zadaniu.

Algiebr: *Mian:* Summa dwóch ſkraynych . . . $2x$.

Różnica dwóch ſkraynych . . . $2y$.

Dwa wyrazy ſkrayné . . . . $x+y$; $x-y$.

Wyráz śrzedni . . . . x.

Wieloczyn ſkraynych . . . . $xx-yy$.

Kwadraty trzech wyrazów $\begin{cases} xx+2xy+yy. \\ xx. \\ xx-2xy+yy. \end{cases}$

Summa tych trzech kwadratów $3xx \quad +2yy$.

Warunek. $\begin{cases} xx-(xx-yy)=4. \\ 3xx+2yy \quad =200. \end{cases}$

Prze-

Przerób: $\begin{cases} yy = 4. \\ 3xx + 2yy = 200. \end{cases}$

(Położywſzy w drugiém równaniu zamiáſt yy, ważność iego wyprowadzoną z piérwſzégo równania) $3xx + 8 = 200$.

(Odiąwſzy 8 po obu ſtronach) $3xx = 192$.

(Podzieliwſzy przez 3) $xx = 64$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy) $x = \pm 8$.

A że ieſt $yy = 4$, więc $y = \pm 2$: tak iak wyżéy.

Uwága. Sciśle mówiąc, Zadanié to ma cztéry rozwiązania, wypadaiącé z porównania każdégo znaku ważności x, z każdym znakiém ważności y.

Cztéry ważności piérwſzégo wyrazu, ſą

$$\begin{cases} +8+2 \text{ albo } 10. \\ +8-2 \;.\;.\;.\;.\;.\; 6. \\ -8+2 \;.\;.\;.\;. -6. \\ -8-2 \;.\;.\;.\; -10. \end{cases}$$

Cztéry ważności trzeciégo wyrazu, odpowiedaiącé piérwſzym cztérém, ſą

$$\begin{cases} +8-2 \text{ albo } +6. \\ +8+2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 10. \\ -8-2 \;.\;.\;.\;. -10. \\ -8+2 \;.\;.\;.\;. -6. \end{cases}$$

Tak dalece, że cztéry naſtępuiącé proporcye

$$\begin{cases} +10, +8, +6. \\ +6, +8, +10. \\ -6, -8, -10 \\ -10, -8, -6. \end{cases}$$

zadoſyć czynią zadaniu: ale dwie piérwſzé nie różnią ſię od ſiebie, tylko porządkiém wyrazów, a dwie drugié, nie różnią ſię od dwóch piérwſzych, tylko znakami.

Inſzé przykłady. Kwadrát wyrazu śrzedniégo, przewyżſzá liczbą 9 Wieloczyn wyrazów ſkraynych: ſumma zaś kwadratów ieſt 318.

Kwadrát wyrazu śrzedniégo, przewyżſzá liczbą 25 Wieloczyn wyrazów ſkraynych, a ſumma kwadratów ieſt 557.

192. *Zadanié 27. Znaléźć 4 liczby, którychby różnica naſtępná byłá iednakowá, i których wieloczyn dwóch śrzednich przewyżſzáłby liczbą 8, Wieloczyn dwóch ſkraynych: a ſumma kwadratów cztérech tych liczb, byłaby 216.*

Mian: Summa dwóch śrzednich . . . . . . $2x$

Różnica dwóch śrzednich . . . . . . $2y$.

Wyrazy dwa śrzednié . . . $x+y$, $x-y$.

Dwa ſkrayné wyrazy znaydziémy, odiąwſzy iedén średni od drugiégo podwoionégo: będą więc cztérech liczb wyrażénia:

$x+3y$, $x+y$, $x-y$, $x-3y$.

Wieloczyn ſkraynych . . . . $xx-9yy$.

Wieloczyn średnich . . . . $xx-yy$.

Różnica tych wieloczynów . . . . $8yy$.

Kwadraty cztérech wyrazów $\begin{cases} xx+6xy+9yy. \\ xx+2xy+yy. \\ xx-2xy+yy. \\ xx-6xy+9yy. \end{cases}$

Summa tych kwadratów . . . . $4xx \quad +20yy$.

Warunek. $\begin{cases} 8yy=8. \\ 4xx+20yy=216. \end{cases}$

Przerób: (Podzieliwſzy piérwſzé równanié przez 8, a drugié przez 4)

$\begin{cases} yy=1. \\ xx+5yy=54. \end{cases}$

(Położywſzy w drugiém równaniu ważność yy, wyciągnioną z piérwſzégo równania) $xx+5=54$.

(Odiąwſzy 5 po obu ſtronach) $xx \quad =49$.

(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadratowy) $x=7$.

Liczby ſzukané . . . $7+3$, $7+1$, $7-1$, $7-3$;

albo . . . 10, 8, 6, 4. któréto liczby czynią zadoſyć dwóm warunkóm.

Trzeba tu tę ſamę uwágę uczynić względém wielości rozwiązáń, którąśmy uczynili po zadaniu poprzedzaiącém.

Inſzé przykłady. *Rożnica dwóch wieloczynów, ieſt* . . 32.

Summa cztérech kwadratów . . . . 864.

Rożnica wieloczynów . . . 72.

Summa kwadratów . . . . 964.

193. *Zadanié 28. Podzielić liczbę daną* 2a, *na dwie takié części, aby kwadrát iednéy, równáł ſię wieloczynowi drugiéy, przez całą liczbę daną.*

Mianowanié. Niech będzie iedna część . . . . x.

Będzie drugá . . . . $2a-x$.

Kwadrát piérwſzéy części . . . . xx.

Wieloczyn drugiéy części, przez całą liczbę $4aa-2ax$.

Warunek. $xx=4aa-2ax$.

Prze-

Przerób: (Dodáwszy $2ax$, po obu stronach) $xx+2ax=4aa$.
(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy części)
$xx+2ax+aa=5aa$.
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadr:) $x+a=\pm a\sqrt{5}$.
(Odiąwszy a, po obu stronach)

$$x=\begin{matrix} a(\sqrt{5}-1). \\ a(-\sqrt{5}-1). \end{matrix}$$

Rozwiązanié. $x=\begin{matrix} a(\sqrt{5}-1). \\ a(-\sqrt{5}-1). \end{matrix}$ Część 1wszá.

$2a-x=a\begin{pmatrix} 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Część drugá.

$aa\begin{pmatrix} 6-2\sqrt{5} \\ 6+2\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Kwadrát z piérwszéy części.

$aa\begin{pmatrix} 6-2\sqrt{5} \\ 6+2\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Wieloczyn z całéy liczby przez część iéy drugą.

194. *Uwága 1wszá.* Piérwszá część drugiégo rozwiązania wziętá przydaynie, odpowiedałaby na następuiącé Zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których różnica iest daná, i z których iednéy kwadrát, równá się wieloczynowi drugiéy, przez różnicę daną.*

Gdyby więc różnica daná oznaczoná była przez $2a$; tedy piérwszá liczba byłaby . . . . . . $a(\sqrt{5}+1)$.
drugá. . . . . $a(\sqrt{5}+3)$.

Jakáżkolwiek zaś będzie wáżność spółmiérná ilości a, wszelako dwóch części szukanych wypadną wáżności niespółmiérné: któráto niespółmiérność pochodzi z wyrażénia $\sqrt{5}$, wmięszanégo w jnné ilości spółmiérné.

195. *Uwága 2gá.* Té wyrażénia, dwoiaki Zadania rozwiązanié, i niespółmiérność części szukanych, zgádzá się z wykréśléniém Jeometryczném, gdy przeciąć liniią przypádá *w śrzednim i skraynym stosunku*; (in media & extrema ratione.)

Niechby liniią AB, przeciąć trzeba w punkcie X, na dwie takié części, aby kwadrát z linii AX, równáł się Prostokątowi z całéy linii AB, przez drugą iéy część BX. Fig. 45.

Wystáwmy sobie, iakby iuż wykréślony kwadrát AXYZ, i prostokąt BXVC. Dopełniwszy kwadratu ABCD, linii AB, i dodáwszy tak do kwadratu AY, iak do równégo mu prostokąta BV, ténże sám prostokąt AXVD; prostokąt DVYZ, równy będzie kwadratowi danému linii AB. Skąd wypádá następuiącé wykréślénié: Wynieśmy liniią AD, prostopadłą do AB, i onéy ró-

 wną.

wną. Tę liniią AD, przetniéymy w punkcie E, na dwie równé części: i poprowádźmy EB. Z punktu E, iak od śrzodka promiéniém EB, wykréślmy koło, któréby przecinało w punkcie Z, liniią AE, przedłużoną. Przenieśmy AZ, na AB, do X. Tén punkt X, będzie punktém podziału ſzukanym.

Koło wykréślone, od śrzodka E, promiéniém EB, przeciná w punkcie Z′, liniią AE, przedłużoną, za punkt D, i liniiá AZ′, leżącá nie po téy ſtronie linii AB, po któréy leży liniiá AZ, ieſt względém niéy uiémną: a zatém ponieważ liniiá AZ, przenieſioná ieſt na liniią AB, od punktu A, ku B; więc liniiá AZ′, má bydź przenieſioná na tęż liniią AB, przedłużoną w ſtronę przeciwną do X′. Wtedy linie AX′, BX′, będą takié, że ich różnicą będzie liniiá daná AB, a kwadrát z linii AX′, równy będzie proſtokątowi, z linii AB, przez BX′: czego bardzo łatwo dowiéśdź można jeometrycznie.

Niech będzie $AB = 2a$: więc $AE = \frac{1}{2}AB = a$.

$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4aa, + aa = 5aa;\ BE = a\sqrt{5}$.

Więc téż $EZ = a\sqrt{5}$; $AZ = a\sqrt{5} - a = a(\sqrt{5} - 1) = AX$

$BX = AB - AX = 2a - (a\sqrt{5} - a) = 3a - a\sqrt{5} = a(3 - \sqrt{5})$.

I znowu, $EZ' = a\sqrt{5}$, $AZ' = AX' = a\sqrt{5} + a = a(\sqrt{5} + 1)$.

$BX' = AB + AX' = 2a + a\sqrt{5} + a = 3a + a\sqrt{5} = a(3 + \sqrt{5})$.

196. *Uwága 3ciá.* Lubo nie można dokładnie wyrazić dwóch części linii, albo liczby podzielonéy w taki ſpoſób, iak Zadanié wyznácza; można iednak wáżność tych części przybliżyć do práwdziwéy więcéy, niżby oznáczała iakáżkolwiek różnica daná. Naſtępuiący *Ciąg*, (Series) dopełniá tego zamiáru 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597: 2584, 4181, i t. d.

W tym ciągu, każdy wyráz naſtępny równá ſię ſummie dwóch wyrazów, które go tuż poprzedzaią: a wziąwſzy trzy którékolwiek naſtępné wyrazy, kwadrát śrzedniégo wyrazu, od wieloczynu dwóch ſkraynych, różnić ſię będzie iednością na przemiany, ráz przez *Nadmiár*, (Exceſſus,) drugi ráz przez *Niedomiár*, (defectus.).

Przeto, ponieważ naywiękſzá z tych trzech liczb, wyráżá ſummę dwóch innych; więc té dwie tym bliżéy wyrażać będą części odpowiedaiącé na zadanié, im téż liczby więkſzé będą. I tak niech będą té trzy liczby 5, 8, 13: kwadrát śrzedniéy, różnić ſię tylko będzie iednością od wieloczynu dwóch ſkraynych, a tą różnicą ieſt $\frac{1}{64}$ tegoż ſamégo kwadratu. Wziąwſzy zaś trzy liczby 89, 144, 233; różnicą między takimże kwadratém, i takim wieloczyném, będzie $\frac{1}{20000}$ tego kwadratu, lub tego wieloczynu.

W ogól-

W ogólności. Niech będą cztéry, któréżkolwiek następné wyrazy ciągu poprzedzaiącégo: niech na trzech piérwszych wyrazach prawdzi się, że kwadrát śrzedniégo z nich różni się iednością, przez nadmiár lub niedomiár od wieloczynu dwóch skraynych: tedy i na trzech ostatnich wyrazach prawdzić się także będzie, że kwadrát śrzedniégo, różnić się będzie od wieloczynu dwóch skraynych iednością, ale przeciwnie przez niedomiár, lub nadmiár.

Oznaczmy cztéry liczby następné przez a, b, $a+b$, $a+2b$.

Jeżeli $bb = a(a+b) \pm 1$.

tedy będzie także $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

Dowodz: Przez przypuszczénié $bb = aa + ab \pm 1$.

więc $bb \mp 1 = aa + ab$.

Dodáwszy $ab + bb$ z obu strón) $ab + 2bb \mp 1 = aa + 2ab + bb$.

albo, $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

A że to przypuszczénié prawdziwé iest co do trzech piérwszych wyrazów ciągu, więc prawdziwé iest także, i co do trzech którychkolwiek następnych wyrazów tegoż ciągu.

Insze przykłady. Podzielić 100 na dwie takié części, aby kwadrát iednéy, równy był wieloczynowi drugiéy przez 90.

Podzielić 144 na dwie takie części, aby kwadrát iednéy równy był wieloczynowi drugiéy przez 24.

W ogólności: podzielić ilość daną na dwie takié części, aby kwadrát iednéy równy był wieloczynowi drugiéy przez ilość także daną.

197. *Przystósowania Zadania poprzedzaiącégo.*

Wyznaczyć tróykąt prostokątny, którégo trzy boki czyniłyby ciągłą proporcyą Jeometryczną.

Niech będzie XZY, tróykąt prostokątny, którégo trzy boki, XY, XZ, ZY, czynić maią ciągłą proporcyą Jeometryczną. Spuśćmy prostopadłą ZV. Fig. 46.

Trzeba, aby było $XZ^2 = XY \times ZY$.

A że iest . . $XZ^2 = XY \times XV$.

Więc . . $XY \times ZY = XY \times XV$.

a zatém . . . $ZY = XV$.

. . . . . . $ZY^2 = XV^2$.

a że . . . . $ZY^2 = XY \times VY$.

Więc . . . . $XV^2 = XY \times VY$.

Więc przeciwprostokątná XY, tróykąta szukanégo, powinna bydź przeciętá w punkcie V, spodnim przy prostopadłéy, w stosunku śrzednim, i skraynym.

Kwa-

Kwadraty boków XY, XZ, ZY, będą do siebie, iak 2, $\sqrt{5}-1$, $3-\sqrt{5}$.
Kwadrát wysokości VZ, będzie do kwadratu boku ZY, iak XV, do XY. Kwadrát zaś boku ZY, będzie do kwadratu boku XZ, iak VY, do VX. Aże $XV : XY = VY : VX$, więc, $VZ^2 : ZY^2 = ZY^2 : XZ^2$.

Więc trzy także linije XZ, ZY, VZ, czynią ciągłą proporcyą: a zatém i trzy boki tego tróykąta, i czwártá wysokość, czynią także proporcyą ciągłą Jeometryczną.

Zadania podobné następuiącému, są też tego samégo gatunku, co i zadanié poprzedzaiącé.

Kupiec przedaiąc konia za 11 Cz: Zł: zyskáł na nim tylé procéntu od sta, ilé go koń kosztowáł: cóż więc dáł za niégo, i ilé zyskáł?

Cena kupna tego konia, tak się má do zysku w przedaży, iak summa 100 Cz: Zł: do téyże ceny kupna: a zatém kwadrát liczby, oznaczaiący cenę kupna, równá się liczbie oznaczaiącéy zysk, rozmnożonéy przez 100. Więc trzeba podzielić cenę przedaży, 11 Cz: Zł: na dwie takié części, aby kwadrát iednéy równáł się wieloczynowi drugiéy przez 100.

Mianowanié. Cena kupna konia . . . . x.
Zysk w przedaży . . . $11-x$.

Warunek. $x : 11 - x = 100 : x$.

Przeráb: (Zrównáwszy wieloczyny, skraynych i średnich wyrazów)
$xx = 1100 - 100x$.
(Dodáwszy $100x$ po obu stronach) $xx + 100x = 1100$.
(Dopełniwszy kwadratu piérwszéy strony)
$xx + 100x + 2500 = 3600$.
(Wyciągnąwszy z obu strón piérwiástek kwadratowy.
$x + 50 = 60$.
(Odiąwszy 50 po obu stronach) $x = 10$.

Rozwiązanié. $x = 10$. Cena kupna konia.
$11 - x = 1$. Zysk.

Sprawdzénié. $10 : 1 = 100 : 10$.

Inszé przykłady. Cena przedaży iest 24, 39, 56, i t. d. Cz: Zł: reszta iak wyżéy.

198. *Zadanié 29. Podzielić ilość daną 2a, na dwie takié części, aby ich wieloczyn równał się różnicy ich kwadratów.*

Mianowanié. Różnica dwóch części szukanych. . . $2x$.
Części szukané . . . . . . $a+x$, $a-x$.
Wieloczyn tych dwóch części . . $aa-xx$.
Kwadraty tych dwóch części . . $\begin{cases} aa+2ax+xx. \\ aa-2ax+xx. \end{cases}$
Różnica tych dwóch kwadratów . . . $4ax$.

Warunek. $4ax = aa - xx$.

Przeráb: (Dodáwszy xx po obu stronach) $xx + 4ax = aa$.
(Dopełniwszy kwadratu 1 wszéy strony)
$xx + 4ax + 4aa = 5aa$.
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy) $x+2a = a\sqrt{5}$.
(Odiąwszy $2a$ po obu stronach) $x = a(\sqrt{5}-2.)$

Rozwiązanié. $a + x = a(\sqrt{5}-1)$.
$a - x = a(3-\sqrt{5})$.

Więc dwie szukané części są dwiéma częściami summy danéy, podzielonéy w stosunku średnim i skraynym.

Spráwdz: $(a+x)^2 = aa(6-2\sqrt{5})$.
$(a-x)^2 = aa(14-6\sqrt{5})$.
$4ax = aa(4\sqrt{5}-8)$.
$aa-xx = aa(4\sqrt{5}-8)$.

Przykłady z ilościami niespółmiernémi. Podzielić summę daną na dwie takié części, aby różnica ich kwadratów, tak się miała do ich wieloczynu, iak 3, do 2.

Niechby znowu różnica kwadratów, tak się miała do wieloczynu ze dwóch części, iak 8, do 3, albo iak 5, do 6.

199. *Zadanié 30. Podzielić summę daną 2a, na dwie takié części, aby stosunek ich równy był stosunkowi summy ich 2a, do ichże różnicy.*

Mianowanié. Różnica dwóch ilości szukanych. . . . $2x$.
Ilości dwie szukané . . . . . $a+x$, $a-x$.

Warunek. $a+x : a-x = 2a : 2x = a : x$.

Przeráb: (Dodaiąc) $2a : a+x = a+x : a$.
więc $(a+x)^2 = 2aa$, toiest kwadrát iednéy części, ró-

 wná

wná ſię połowie kwadratu ſummy danéy: a zatém, tak ſię má część większá, do ſummy dwóch części, iak bok kwadratu, do iego przeciwproſtokątnéy.

Rózwiązanié. $a + x = a\sqrt{2}$

$$x = a(\sqrt{2} - 1).$$

$$a - x = a(2 - \sqrt{2}) = a\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1).$$

200. *Uwága.* Ważność tych ilości nieſpółniérnych można do prawdziwéy przybliżyć, tak, iak tylko zechcémy, przez naſtępuiące ułómki;

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{29}{41}$, $\frac{70}{99}$, $\frac{169}{239}$, $\frac{408}{577}$, $\frac{985}{1393}$, $\frac{2378}{3363}$, i t. d.

W tym Ciągu licznik każdégo ułómka, ieſt ſummą dwóch wyrazów ułómka poprzedzaiącégo: a mianownik każdégo ułómka, ieſt ſummą z jego licznika, i z licznika ułómku poprzedzaiącégo.

Jeżeli mianownik iednégo z tych ułómków oznaczy ſummę daną; tedy licznik iego i różnica dwóch iego wyrazów, toieſt, licznika i mianownika, oznáczać będzie bardzo blizko dwie części ſzukané téy ſummy: albo co na iedno wychodzi, kwadrát mianownika ułómku każdégo naſtępnégo w tym ciągu co ráz bardziéy ſię przybliżá do podwóynégo kwadratu licznika iego.

Przykłád, Kwadraty wyrazów ułómka $\frac{12}{17}$, ſą 144; i 289, drugi zaś z nich nie róźni ſię tylko iednością od piérwſzégo kwadratu podwoionégo. Podobnie i kwadraty wyrazów ułómka $\frac{70}{99}$, ſą 9801, i 4900: z których piérwſzy, różni ſię tylko iednością od drugiégo podwoionégo.

Summa dwóch części ſzukanych, té ſamé dwie części, i ich różnica, ſą do ſiebie tak prawie iak liczby 17, 12, 5, 7, albo iak liczby 99, 70, 29, 41; i mało co chybiać będą naſtępuiącé proporcye:

$$\begin{matrix} 12 : 5 = 17 : 7, \\ 70 : 29 = 99 : 41, \end{matrix} \quad \text{albo} \quad \begin{matrix} 12 : 17 = 5 : 7 \\ 70 : 99 = 29 : 41 \end{matrix}, \text{ponieważ}$$

w każdym ſtoſunku, kwadraty naſtępników, ſą prawie dwa razy tak wielkié, iak kwadraty poprzedników.

Można tu ieſzcze tę ſamę uwágę przydadź, która ſię uczyniła (§. 196.)

201. *Zadanié 31. Znaléźć dwie liczby, których wiadomy ieſt wieloczyn i różnica kwadratów.*

Niech będzie tén wieloczyn 35, a kwadratów różnica 24.

Spoſób 1. Nazwiéymy iednę z liczb ſzukanych . . . x, drugá zatém bydź powinna $\frac{35}{x}$, bo tak wieloczyn z nich wypadnie 35.

Kwadraty tych dwóch liczb . . . . $\left\{ xx, \text{ i } \frac{1225}{xx} \right.$.

Waru-

Warunek. $xx - \frac{1225}{xx} = 24.$

Przerób: (Rozmn: przez xx obie ftrony) $x^4 - 1225 = 24xx.$
(Dodáwfzy 1225 po obu ftronach) $x^4 = 24xx + 1225.$
(Odiąwfzy $24xx$ po obu ftronach) $x^4 - 24xx = 1225.$
(Dopełniwfzy kwadratu w piérwfzéy ftronie)
$x^4 - 24xx + 144 = 1369.$
(Wyciągnąwfzy piérwiáftek kwadratu z obu ftrón)
$x^2 - 12 = \pm 37.$
(Dodáwfzy 12 po obu ftronach) $xx = \begin{matrix} +49. \\ -25. \end{matrix}$
(Wyciągnąwfzy znowu piérwiáftek kwadratowy)
$x = \begin{matrix} \pm 7. \\ \pm 5\sqrt{-1}. \end{matrix}$

202. *Uwága.* To Zadanié zaprowadziło nás do równania, w któróm ilość niewiadomá wzięta była 4 razy, i znowu 2 razy za *Czynnika,* (Factor,) toieft, że téy ilości wykładnik był 4, w jednym wyrazie, a 2, w drugim. Ale że *Mnogość,* (Potentia) ilości niewiadoméy (x^4), w piérwfzym wyrazie ieft kwadratém mnogości w drugim wyrazie (x^2), i że w całym równaniu, nié má więcéy, iak té dwa wyrazy, w któré ilość niewiadomá wchodzi; więc možná fię było obéyśdź z tém równaniém, iak gdyby tylko było w drugim ftopniu, wyftawuiąc fobie xx, za ilość niewiadomą, a zatém wyftawuiąc fobie drugi równania wyráz $24xx$, za podwóyny wieloczyn ilości niewiadoméy xx, przez drugi wyráz piérwiáftku.

Łatwiéy ieszcze to przerábianié zrozumiémy, położywfzy ilość z, jednégo tylko *wymiaru,* (dimenfio) za ilość xx, dwóch wymiarów, a tak okáże fię równanié w kfztałcie zwyczaynym.

$$zz - 24z = 1225.$$

Więc $zz - 24z + 144 = 1369.$

$$z - 12 = \pm 37.$$

$$z = \begin{matrix} +49 \\ -25 \end{matrix} = xx;$$

Więc $x = \begin{matrix} \pm 7. \\ \pm 5\sqrt{-1}. \end{matrix}$ tak iak wyżéy.

$$\frac{35}{x} = \frac{35}{\pm 7} = \pm 5.$$

$$= \frac{35}{\pm 5\sqrt{-1}} = \frac{35\sqrt{-1}}{\mp 5} = \mp 7\sqrt{-1}.$$

Widzimy tu także, iż Zadanié to mieć może cztéry rozwiązania, z których każdé czyni zadosyć warunkóm wyłożonym w témże Zadaniu.

Ilości dwie szukané, mogą mieć cztéry odpowiedaiące im ważności:

$+7, +5.$

$-7, -5.$

$+5\sqrt{-1}, -7\sqrt{-1}.$

$-5\sqrt{-1}, +7\sqrt{-1}.$

Z tych cztérech rozwiązáń, ponieważ ostatnié dwa, są *bezistotné*, (imaginariæ) czyli nie podobné; więc ié trzeba opuścić. Że zaś dwa piérwszé, różnią się tylko samémi znakami, które nie czynią żadnéy odmiany ani w wieloczynie, (dlá iednakowości tychże znaków w czynnikach) ani w kwadratach; więc té dwa piérwszé rozwiązania, wychodzą na iedno co do wielkości: tak dalece, iż w każdém przystosowaniu tego Zadania, do *przedmiotów*, (objecta) istotnych, możná wziąźć dwie té ważności 7, si 5, za samé i iedné ilości szukané.

Sposób 2. Summa dwóch ilości szukanych . . $2s$.
Różnica . . . . $2d$.
Ilości dwie szukané $\begin{cases} s+d. \\ s-d. \end{cases}$
Wieloczyn . . . . $ss-dd$
Kwadraty . . . . $\begin{cases} ss+2ds+dd. \\ ss-2ds+dd. \end{cases}$
Różnica kwadratów . . . $4ds$.

Warunek: $\begin{cases} ss-dd=35. \\ 4ds=24. \end{cases}$

Przerób: (Strony 2go równania przez 2 podzieliwszy)

$\begin{cases} ss-dd=35. \\ 2ds=12. \end{cases}$

(Skwadrowawszy strony obudwóch równáń)

$\begin{cases} s^4-2ddss+d^4=1225. \\ 4ddss=144. \end{cases}$

(Dodáwszy strony odpowiedaiącé sobie, w obudwóch równaniach) $s^4+2ddss+d^4=1369$.

(Wycią-

(Wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy)

$$ss + dd = \pm 37,$$

a że $ss - dd = 35$.

Więc dodáwszy i odiąwszy strony sobie odpowiedaiącé:

$$2ss = \begin{matrix} +72. \\ -2. \end{matrix} \qquad \text{Więc} \qquad ss = \begin{matrix} +36. \\ -1. \end{matrix}$$

$$2dd = \begin{matrix} +2. \\ -72. \end{matrix} \qquad\qquad dd = \begin{matrix} +1. \\ -36. \end{matrix}$$

Porzuciwszy rozwiązania uiémné, z którychby wypadły pierwiastki bezistotné, zostaną dwa przydayné:

$$ss = 36; \quad dd = 1.$$

$$\text{Więc } s = \pm 6; \quad d = \pm 1.$$

Wziąwszy i tu znowu samé ważności przydayné, będzie

$$s = 6; \; d = 1.$$

a zatém $s + d = 7$.

$s - d = 5$. tak iak wyżéy.

Lubo to Zadanié zaprowadziło nás do równania zawiéraiącégo w sobie ilość niewiadomą, ze cztéréma wymiarami; możná iednak toż Zadanié przywiéśdź do Zadania 1go w tym Rozdziale, tak go wyrażaiąc: *Znaléźć dwie liczby, których wiémy stosunek i wieloczyn.* albo: *Znaléźć dwie linii, których wiémy stosunek i prostokąt.*

203. *Maiąc wiadomy Wieloczyn dwóch liczb, lub prostokąt dwóch liniy, i różnicę ich kwadratów, będzie w szczególności wiadomy stosunek tychże liczb, albo liniy.*

Wystáwmy sobie, iakoby dwie ilości szukané, były dwa ramiona kąta prostégo w troykącie prostokątnym XYZ. Spuśćmy prostopadłą YP, na przeciw-prostokątną XZ, i przetniéymy tę przeciw-prostokątną w punkcie S, na dwie równé części: z punktu S, poprowádźmy SY. Prostokąt ze dwóch liniy XY, ZY, równá się prostokątowi z przeciw-prostokątnéy XZ, i z wysokości YP, (Jeom: Część I. §. 226.) Ponieważ zaś kwadraty z liniy XY, i YZ, równé są, piérwszy prostokątowi z przeciw-prostokątnéy XZ, przez odcinek XP, drugi prostokątowi z téyże prostokątnéy XZ, przez odcinek ZP; (Część I. §. 126) więc różnica tych kwadratów, równá będzie prostokątowi z przeciwprostokątnéy XZ, przez różnicę liniy XP, ZP, toiest przez dwa razy wziętą SP. A że stosunek prostokąta, do różnicy kwadratów liniy XY, i YZ, iest dany; więc téż i stosunek prostokątów z przeciwprostokątnéy przez PY, i przez 2SP, dany będzie: a zatém i stosunek linii PY, do SP, także dany będzie: a stąd wia- Fig. 47.

wiadomy także będzie, i ſtoſunek PY^2, do SP^2, iako téż i ſtoſunek $PY^2 + SP^2 = SY^2 = SX^2 = SZ^2$, do SP^2. Więc ſtoſunek linii SX, albo SZ, do SP, ieſt także dany: więc i ſtoſunek $SX + SP$, albo PX, do $SZ - SP$, albo PZ ieſt dany. A że tén oſtatni ſtoſunek, równá ſię ſtoſunkowi XY^2 do ZY^2; więc ſtoſunek XY^2, do ZY^2, a zatém i ſtoſunek XY, do ZY, ieſt dany.

W przykładzie poprzedzaiącym;

$XY^2 - ZY^2 : XY \times ZY = 24 : 35.$
albo . . . . . $XZ \times 2SP : XZ \times PY = 24 : 35.$
a zatém . . . . . . $2SP : PY = 24 : 35.$
$SP : PY = 12 : 35.$
więc . . . . $SP^2 : PY^2 = 144 : 1225.$
więc . . . . $SP^2 : SX^2 = 144 : 1369.$
a zatém . . . . . . $SP : SX = 12 : 37.$
więc . . . . $XP : PZ = 49 : 25.$
albo . . . . $XY^2 : YZ^2 = 49 : 25.$
a zatém . . . . . . $XY : YZ = 7 : 5.$
więc téż . . . . . $XY^2 : XY \times YZ = 7 : 5.$
A że ieſt . . . . $XY \times YZ = 35$
więc . . . . $XY^2 : 35 = 7 : 5 = 49 : 35.$
więc . . . . $XY^2 = 49$, a $XY = 7$.
Tak téż będzie . . . . $YZ = 5$.

Inſzé przykłady. Wieloczyn dany . . 77.
Różnica kwadratów . 72.
Wieloczyn dany . . . 425.
Różnica kwadratów . . 336.

204. *Zadanié 32. Znaléźć dwie liczby, których daná ieſt ſumma 2ſ, i daná ſumma ich ſześcianów 2c.*

Mianowanié. Różnica liczb ſzukanych . . . $2d$.

Liczby ſzukané . . . . . $s + d$.
$s - d$.

Sześciany liczb ſzukanych . . . $s^3 + 3s^2d + 3sd^2 + d^3$.
$s^3 - 3s^2d + 3sd^2 - d^3$.

Summa ſześcianów . . $2s^3 \quad + 6sd^2$.

Warunek. $2s^3 + 6sd^2 = 2c$.

Prze-

Przeróbka: (Podzieliwſzy przez 2) . $s^3+3sd^2=c$.
(Odiąwſzy s^3) . . . . . . $3sd^2=c-s^3$.
(Podzieliwſzy przez $3s$) . . . $d^2=\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}s^2$.
(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr:) . $d=\pm\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{s^2}{3}\right)}$

Rozwiązanié. $s+d=s\pm\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{s^2}{3}\right)}$.

$s-d=s\mp\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{s^2}{3}\right)}$.

Dwie tedy ſzukané liczby, ſą $s+\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{ss}{3}\right)}$ i $s-\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{ss}{3}\right)}$.

Sprawdzénié.

$$\left(s+\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}\right)^3=s^3+3ss\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}+3s\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)+\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}$$

$$\left(s-\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}\right)^3=s^3-3ss\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}+3s\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)-\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)\sqrt{\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)}$$

Summa . . . $2s^3 \qquad +6s\left(\frac{c}{3s}-\frac{1}{3}ss\right)=2s^3+2c-2s^3=2c$.

$2s=12$; $2c=468$.
Przykłady. $2s=22$; $2c=2926$.
$2s=28$; $2c=6244$.

205. *Zadanié 33. Znaléźć dwie liczby, ktòrych wiadomá ieſt ròżnica* 2d, *i ròżnica ich ſześcianòw* 2c.

Mianowanié. Summę dwóch liczb ſzukanych, oznaczywſzy przez $2s$, znaydziémy tymże ſpoſobém, iak w mianowaniu poprzedzaiącém, że różnica ſześcianów będzie $6ssd+2d^3$.

Warunek. $6ssd+2d^3=2c$.

Przeróbka: (Odiąwſzy $2d^3$) $6ssd=2c-2d^3$.

(Podzieliwſzy przez $6d$) $ss=\frac{c}{3d}-\frac{1}{3}dd$,

(Wycią-

(Wyciąg: piérw: kwadr:) $s=\pm\sqrt{\left(\frac{c}{3d}-\frac{1}{3}dd\right)}=\sqrt{\left(\frac{c}{3d}-\frac{1}{3}dd\right)}$

Uwága. To wyrażénié ilości s, w jlości d, ieſt to ſamo, które było ilości d, w jlości s, w poprzedzaiącém zagadniéniu.

Przykłady. $2d=2$; $2c=218$.
$2d=4$; $2c=1468$.
$2d=6$; $2c=3582$.

Zadania naſtępuiącé, *Znaléźć dwie liczby, których ſumma i różnica ſześcianów ieſt wiadoma*: albo, *których wiadomá ieſt różnica, i ich ſześcianów ſumma*: nié mogą bydź przywiedzioné do drugiégo ſtopnia; i przeſzłyby granice wymierzoné téy początkowéy Algiebrze.

206. *Zadanié 34. Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt ſumma, i ſumma ich czwártych mnogości.* (*)

Niech będzie dwóch liczb ſumma daná . . $2s$.
Tychże liczb, czwártych mnogości ſumma . $2q$.
Mian: Różnica ſzukaná tych liczb . . . . . $2d$.
a zatém té dwie liczby ſzukané . . . $s+d$, $s-d$.

Czwárté mnogości tych liczb $\begin{cases} s^4+4s^3d+6s^2d^2+4sd^3+d^4. \\ s^4-4s^3d+6s^2d^2-4sd^3+d^4. \end{cases}$

Summa . . . . . $2s^4 + 12s^2d^2 + 2d^4$.

Warunek. $2d^4+12ssdd+2s^4=2q$.

Przeráb: (Podzieliwſzy przez 2) $d^4+6ssdd+s^4=q$.
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$d^4+6ssdd+9s^4=q+8s^4$.
(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr:) $d^2+3s^2=\pm\sqrt{(q+8s^4)}$.
(Odiąwſzy $3s^2$) . . . . $d^2=\pm\sqrt{(q+8s^4)}-3s^2$.
Opuściwſzy drugié rozwiązanié, dlá tego, iż na dd, daie wáżność niémną; będzie $dd=\sqrt{(q+8s^4)}-3s^2$.

(*) Czwártą mnogością ilości iakiéy, naprzykład liczby, nazywámy tén wieloczyn, który uróſł z jednéy liczby cztéry razy wziętéy za czynnika; albo co na iedno wychodzi, gdy kwadrát iakiéy liczby przez ténże ſám kwadrát rozmnożymy; zrobi ſię wieloczyn, który zowiémy *czwártą mnogością* téy liczby. Po łacinie nazywa ſię to *quarta potentia*.

Więc $d = \pm\surd(\surd(q + 8s^4) - 3s^2)$.

$s + d = s \pm \surd(\surd(q + 8s^4) - 3s^2)$
$s - d = s \mp \surd(\surd(q + 8s^4) - 3s^2)$ } Té ważności, są względém siebie *wzaiémné*, (reciprocæ) tak iak w rozwiązaniu zadania 32.

Przykłady. $2s = 8$; $2q = 706$.
$2s = 10$; $2q = 2482$.
$2s = 12$; $2q = 3026$.

Tymże sposobém rozwiązać można następuiącé zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których wiémy różnicę, i których wiémy także różnicę czwártych mnogości.*

207. *Zadanié 35. Znaléźć dwie liczby, których summa iest wiadomá, i wiadomá także summa ich piątych mnogości.*

Niech będzie dwóch liczb summa daná . . $2s$.
Piątych ich mnogości summa . . . . . . $2q$.

Mianowanié. Różnica tych liczb szukaná . . . . $2d$.

Liczby szukané . . . . { $s + d$. / $s - d$

Piąté ich mnogości { $s^5 + 5s^4d + 10s^3d^2 + 10s^2d^3 + 5sd^4 + d^5$. / $s^5 - 5s^4d + 10s^3d^2 - 10s^2d^3 + 5sd^4 - d^5$.

Summa . . . . $2s^5 \quad + 20s^3d^2 \quad + 10sd^4$.

Warunek. $10sd^4 + 20s^3d^2 + 2s^5 = 2q$.

Przerab: (Podzieliwszy przez $10s$) $d^4 + 2s^2d^2 + \frac{1}{5}s^4 = \frac{q}{5s}$.

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie przez dodanié $\frac{4}{5}s^4$)

$$d^4 + 2s^2d^2 + s^4 = \frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4.$$

(Wyciągnąwszy piérw: kwadr:) $d^2 + s^2 = \surd\left(\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4\right)$

(Odiąwszy s^2) $d^2 = \surd\left(\frac{q}{5s} + \frac{4}{5}s^4\right) - s^2$.

 (Wycią-

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)

$$d=\sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4\right)}-s^2\right)}.$$

$$s+d=s+\sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4\right)}-s^2\right)}.$$

$$s-d=s-\sqrt{\left(\sqrt{\left(\frac{q}{5s}+\tfrac{4}{5}s^4\right)}-s^2\right)}.$$

Przykłady. $2s = 8$; $2q = 3368$.
$2s = 10$; $2q = 17050$.
$2s = 12$; $2q = 19932$.

Tymże ſpoſobém rozwiążémy naſtępuiące Zadanié: *Znaléźć dwie liczby, których wiadomá ieſt różnica, i wiadomá ieſt także różnica piątych ich mnogości.*

208. *Zagadniénié niewyznaczoné.* (indeterminatum).

Znaléźć trzy liczby, których wiémy ſummę, wiémy także ſummę ich kwadratów, i ſummę wieloczynów tychże liczb branych parami.

W tém zadaniu trzy ſą ilości ſzukané, i zdaie ſię, że także trzy warunki ſą dané: a zatém zagadniénié zdaie ſię bydź wyznaczoném. Ale że trzeci warunek ieſt koniecznym wnioſkiém ze dwóch piérwſzych; przeto zagadniénié ieſt w ſamey rzeczy nie wyznaczoném.

Jakoż niech będą x, y, z, trzy ilości ſzukané, których Summa s.

Ponieważ $(x+y+z)=s$.

będzie $(x+y+z)^2=ss$.

albo $xx+2xy+yy+2xz+2yz+zz=ss$.

czyli $(xx+yy+zz)+2(xy+xz+yz)=ss$.

A że $(xx+yy+zz)$ ieſt ſummą kwadratów ilości trzech ſzukanych.

a $2(xy+xz+yz)$ ieſt podwóyną ſummą wieloczynów tychże ilości, branych parami; więc ſumma ich wieloczynów tak branych ieſt iuż wyznaczoná przez ſummę tychże ilości, i przez ſummę ich kwadratów: toieſt, ſummą tych trzech wieloczynów będzie połowa nadmiaru kwadratu ſummy trzech ilości, nad ſummę ich kwadratu.

Tymże wcale ſpoſobém okázaćby można, że kwadrát ſummy ilukolwiek ilości ſkłádá ſię z ſummy kwadratów tychże ilości, i z podwóyney ſummy wieloczynów tychże ilości po dwie branych: a zatém ſumma taká wieloczy-

ſoczynów, zawſzé ieſt połową nadmiaru kwadratu ſummy tych ilości, nad ſummę ichże kwadratów.

Jakož niech będzie $a+b+c+d+e+f+g$, i t. d. Summa ilukolwiek ilości: Kwadrát téy ſummy, ſkłádá ſię z kwadratu piérwſzéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téy piérwſzéy ilości przez wſzyſtkié inné ilości i z kwadratu ſummy tychże innych ilości. Tén oſtatni kwadrát, ſkłádá ſię z kwadratu drugiéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téyże ilości, przez wſzyſtkié inné pozoſtałé, i z kwadratu tych oſtatnich ilości pozoſtałych: który to znowu kwadrát, ſkłádá ſię z kwadratu trzeciéy ilości, z ſummy podwóynych wieloczynów téyże ilości przez wſzyſtkié inné pozoſtałé, i z kwadratu tychże oſtatnich ilości i t. d.

I tak, $(a+b+c+d)^2 = aa+2ab+2ac+2ad+bb+2bc+2bd+cc+2cd+dd = (aa+bb+cc+dd)+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$.

209. *Drugié zagadnienié niewyznaczoné. Znaléźć proporcyą Arytmetyczną, któréy wiémy ſummę cztérech wyrazów, ſummę ich kwadratów, i ſummę ich ſześcianów.*

Ponieważ ſumma wyrazów ſkraynych proporcyi ſzukanéy równać ſię powinna ſummie wyrazów śrzednich; więc tak piérwſzá, iak i drugá ta ſumma, równá będzie połowie ſummy danéy cztérech wyrazów: a zatém ieżeli ſummę cztérech wyrazów nazwiémy $4s$; ſumma dwóch ſkraynych, albo dwóch śrzednich, będzie $2s$.

Niech różnica śrzednich będzie . . . $2x$.

Różnica ſkraynych . . . . $2y$.

Będą cztéry wyrazy proporcyi . . . $\begin{cases} s+y. \\ s+x. \\ s-x. \\ s-y. \end{cases}$

Kwadraty . . . . $\begin{cases} ss+2sy+yy. \\ ss+2sx+xx. \\ ss-2sx+xx. \\ ss-2sy+yy. \end{cases}$

Summa kwadratów . . . . . $4ss \quad + 2(xx+yy)$.

Sześciany . . . . $\begin{cases} s^3+3s^2y+3sy^2+y^3. \\ s^3+3s^2x+3sx^2+x^3. \\ s^3-3s^2x+3sx^2-x^3. \\ s^3-3s^2y+3sy^2-y^3. \end{cases}$

Summa ſześcianów . . . . $4s^3 \quad + 6s(xx+yy)$

 W wy-

W wyrażéniu summy kwadratów sama tylko summa $xx + yy$, iest niewiadomá, i taż także summa iest ilością niewiadomą w summie sześcianów. A w szczególności: summa summy sześcianów ilości cztérech w proporcyi Arytmetycznéy, i sześcianu połowy summy tychże cztérech ilości, iest potróyná wieloczynu z summy kwadratów tychże ilości, przez czwártą część ich summy.

Jakoż piérwszá summa iest $12s^3 + 6s(xx + yy) = 3(4s^3 + 2s(xx + yy))$
$= 3s(4ss + 2(xx + yy))$.

210. *Trzecié Zagadniénié niewyznaczoné.*

Wyznaczyć proporcyą Jeometryczną, któréy wiémy summę skraynych, i summę śrzednich wyrazów, i nadmiár summy kwadratów z skraynych, nad summę kwadratów z śrzednich.

Ponieważ cztéry wyrazy szukané maią ułożyć proporcyą Jeometryczną; więc wieloczyn skraynych będzie równy wieloczynowi śrzednich. Kwadrát dany summy skraynych równy iest summie kwadratów tychże skraynych, i podwóynégo ich wieloczynu; a kwadrát dany summy śrzednich równy także iest summie kwadratów tychże śrzednich, wráz z wieloczynem ich podwóynym, albo wráz z podwóynym wieloczynem skraynych. Więc różnica tych dwóch kwadratów równá będzie różnicy między summą kwadratów skraynych, i summą kwadratów śrzednich: a zatém ta ostatniá różnica wyznaczoná iest przez różnicę między kwadratami summy skraynych, i kwadratami summy śrzednich.

Fig. 48. *Jeometrycznie.* Niech śrzednica AB, oznáczá summę skraynych wyrazów, toiest náywiększégo i náymnieyszégo, i niech cięciwa DE, oznáczá summę śrzednich. Niech będą skrayné AX, BX: a śrzednie DX, EX. Od śrzodka C, spuśćmy CF, prostopadłą do DE, i poprowádźmy promień CE.

$$AX^2 + BX^2 = 2CB^2 + 2CX^2.$$
$$EX^2 + DX^2 = 2EF^2 + 2FX^2.$$

Więc; $(AX^2 + BX^2) - (EX^2 + DX^2) = 2CB^2 - 2EF^2 + (2CX^2 - 2FX^2)$
$= 2CB^2 - 2EF^2 + 2CF^2.$
$= 2CB^2 - 4EF^2 + (2CF^2 + 2EF^2)$
$= 2CB^2 - 4EF^2 + 2CB^2.$
$= 4CB^2 - 4EF^2.$
$= AB^2 - ED^2.$

Niech summa daná skraynych będzie . . . . . $2a$.
. . . . śrzednich . . . . $2b$.
Różnica skraynych . . . . $2x$.
. . . śrzednich . . . . $2y$.

Skrayne

Skrayné $\begin{cases} a + x. \\ a - x. \end{cases}$

Srzednié $\begin{cases} b + y. \\ b - y. \end{cases}$

Kwadraty ſkraynych $\begin{cases} aa + 2ax + xx. \\ aa - 2ax + xx. \end{cases}$

Kwadraty śrzednich $\begin{cases} bb + 2by + yy. \\ bb - 2by + yy. \end{cases}$

Summa kwadratów ſkraynych . . . $2aa + 2xx.$

. . . . śrzednich . . . $2bb + 2yy.$

Różnica tych dwóch ſumm . . $2aa + 2xx - (2bb + 2yy).$

$= 2(aa - bb) + 2(xx - yy).$

Przez przypuſzczénié, ieſt $aa - xx = bb - yy.$

albo $xx - yy = aa - bb.$

więc $2(xx - yy) = 2(aa - bb).$

a zatém $2(aa - bb) + 2(xx - yy) = 4(aa - bb).$

$= 4aa - 4bb.$

2. Tymże ſpoſobém możnáby okázać, że gdyby daná byłá różnica dwóch wyrazów ſkraynych, różnica dwóch wyrazów śrzednich, i nadmiár ſummy kwadratów ſkraynych, nad ſummę kwadratów śrzednich; Zagadniénié to, byłoby także nie wyznaczoném: ponieważ tén oſtatni nadmiár ieſt równy różnicy kwadratów dwóch różnic danych.

3. I to także Zagadniénié byłoby niewyznaczoném, gdyby nám wiadomá byłá ſumma ſkraynych wyrazów, (náywiękſzégo i náymnieyſzégo) różnica śrzednich, i ſumma kwadratów cztérech wyrazów: ponieważ ta oſtatniá ſumma równá ieſt ſummie kwadratów ſummy ſkraynych, i różnicy śrzednich wyrazów.

211. Naſtępuiącé iednak Zagadniénia ſą wyznaczonémi.

1. *Wiadomá ieſt ſumma ſkraynych, ſumma śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

2. *Wiadomá ieſt różnica ſkraynych, różnica śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

3. *Wiádomá ieſt ſumma ſkraynych, róźnica śrzednich, i nadmiár ſummy kwadratów ſkraynych nad ſummę kwadratów śrzednich.*

4. *Wiadomá ieſt róźnica ſkraynych, ſumma śrzednich, i ſumma kwadratów ilości cztérech.*

 5. *Wia-*

5. *Wiadomá ieſt róžnica ſkraynych, ſumma ſrzednich, i róžnica między ſummą kwadratów ſkraynych, a ſummą kwadratów ſrzednich.*

Przykład. Ponieważ ſumma kwadratów ze cztérech wyrazów proporcyi Jeometryczněy równá ſię ſummie kwadratów ſummy ſkraynych, i różnicy ſrzednich téyże proporcyi; więc piérwſzé dwie ſummy maiąc dané, będzie tém ſamém daná i różnica ſrzednich: a zatém ieżeli ſumma tychże ſrzednich ieſt daná, będą obadwa w ſzczególności wiadomé.

Niech będzie $2s$ ſumma ſkraynych.

$4q$ Summa 4 kwadratów.

$2m$ Summa dwóch ſrzednich.

Kwadrát różnicy dwóch ſrzednich $4q - 4ss = 4(q - ss)$.

Różnica dwóch ſrzednich . . . $2\sqrt{(q - ss)}$.

Wyrazy ſrzednié $\begin{cases} m + \sqrt{(q - ss)}. \\ m - \sqrt{(q - ss)}. \end{cases}$

Wieloczyn tych ſrzednich, a zatém i ſkraynych.

$$mm - (q - ss) = mm - q + ss.$$

Kwadrát połowy różnicy dwóch ſkraynych.

$$ss - (mm - q + ss) = q - mm.$$

Więc różnica ſkraynych $\sqrt{(q - mm)}$.

Proporcyá

$$s + \sqrt{(q - mm)} : m + \sqrt{(q - ss)} = m - \sqrt{(q - ss)} : s - \sqrt{(q - mm)}$$

ROZDZIAŁ VII.

O Ciągach Arytmetycznych.

---

212. Tén *ſzereg*, (ſeries) liczb nazywámy *Ciągiém Arytmetycznym*, (Progreſſio Arithmetica) gdzie różnica dwóch liczb náſtępnie po ſobie idących ieſt iednákowá.

I tak, ſzereg liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. i t. d.

Szereg liczb niepárzyſtych 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 21. i t. d. nazywá ſię Ciągiém Arytmetycznym.

W piér-

W piérwszym z tych szeregu różnica dwóch wyrazów bliżkich iest 1; w drugim szeregu ta różnica iest 2.

W piérwszym szeregu, każdy wyráz równá się liczbie oznaczaiącéy mieysce, które tén wyráz zastępuie w tym szeregu.

I tak dziesiąty *np.* wyráz w tym szeregu liczb naturalnych będzie 10, dwudziesty wyráz 20, setny 100 i t. d. a w ogólności wyráz *n*ty, będzie *n*.

W drugim szeregu, piérwszy wyráz iest 1; drugi má więcéy 2, iednościami od piérwszégo, trzeci má więcéy 2 iednościami od drugiégo; takié więc bydź może iego oznaczénié $1+2\times2$; czwárty má więcéy, dwomá iednościami od trzeciégo; takié więc bydź może iego oznaczénié $1+3\times2$; tak dalece, że każdy wyráz szeregu liczb nie párzystych, oznaczyć można przez summę z iedności, i z różnicy następnéy 2, wziętéy iedén ráz mniéy, niż wyrážá liczba oznaczaiącá mieysce, które tén wyráz w szerégu zastępuie. I tak, dziesiątá liczba niepárzystá, będzie $1+2\times9$: dwudziestá $1+2\times19$: setná $1+2\times99$. Liczba *n*tá nie párzystá $1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1$, toiest każdá liczba niepárzystá, zawsze będzie iednością mnieyszá od podwóynéy liczby oznáczaiącéy mieysce, które tamta liczba zastępuie w szeregu liczb niepárzystych.

W ogólności; niech będzie Ciąg Arytmetyczny, którégo piérwszy wyráz *a*, różnica zaś następná dwóch wyrazów, niech będzie *d*.

W takowym Ciągu, będą wyrazy następuiące:

2gi.	3ci.	4ty.	5ty.	6ty.	7my.	8my.
$a+d$.	$a+2d$.	$a+3d$.	$a+4d$.	$a+5d$.	$a+6d$.	$a+7d$.

9ty	10ty	20ty	. . 100tny	. . . .	*n*ty.
$a+8d$.	$a+9d$. . . .	$a+19d$	. . $a+99d$	. . .	$a+d(n-1)$.

Oznaczénié to $a+d(n-1)$ nazywá się *wyrazém ogólnym* (terminus generalis) ciągu. Położywszy zamiást *n*, w tém oznaczéniu ogólném wážności szczególné wyrazów; *np.* 10tégo, 20tégo, i t. d. będzie wyráz 10ty, $a+9d$: 20ty $a+19d$, i t. d.

Niech będzie 10 piérwszych liczb naturalnych 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10: zróbmy znich 5 pár, tak aby iedna pára składała się ze dwóch skraynych wyrazów, inné zaś páry aby się składały ze dwóch wyrazów iednako odległych od skraynych: summa każdéy z tych pár będzie iednakowá.

toiest $1+10=11$.
$2+9=11$.
$3+8=11$.
$4+7=11$.
$5+6=11$.

Jakoż,

Jakoż, piérwſzy *np.* wyráz drugiéy páry przewyżſzá iednością piérwſzy wyráz piérwſzéy páry: ale przeciwnie, drugi wyráz drugiéy páry mnieyſzy ieſt iednością od drugiégo wyrazu piérwſzéy páry. Piérwſzé wyrazy 3ciéy, 4téy, 5téy páry większé ſą względém piérwſzégo wyrázu piérwſzéy páry dwiéma, trzéma, cztéréma iednościami: ale przeciwnie drugié wyrazy tychże pár mnieyſzé ſą tyląż iednościami względém drugiégo wyrazu téyże piérwſzéy páry. Wziąwſzy tedy wyrazy piérwſzéy páry za ſkrayné; będzie możná wziąść wyrazy każdéy innéy páry za śrzednié proporcyi Arytmetycznéy: a zatém ſumma każdéy páry ieſt iednakowá.

To rozumowanié przyſtoſówać ſię może do tylu pár, ilé zechcémy. Zawſze różnica piérwſzégo wyrazu któréykolwiek páry od wyrazu piérwſzégo piérwſzéy páry równá będzie różnicy drugiégo wyrazu tamtéy páry od wyrazu drugiégo piérwſzéy páry. I to ſię prawdzi na każdym ciągu Arytmetycznym.

Jakoż, niech w ciągu iakimkolwiek Arytmetycznym piérwſzy wyráz będzie a, różnica naſtępná dwóch wyrazów d, liczba tych wyrazów $n+1$; oſtatni wyráz będzie $a+dn$.

2gié wyrazy od ſkraynych, będą $a+d$, i $a+d(n-1)$.
3cié . . . . $a+2d$, i $a+d(n-2)$.
4té . . . . $a+3d$, i $a+d(n-3)$.
5té . . . . $a+4d$, i $a+d(n-4)$.
⋮
*m*té . . . . $a+d(m-1)$, i $a+d(n-(m-1))$.

Summa zaś każdéy páry, będzie $2a+dn$.

Jeżeli liczba wyrazów Ciągu ieſt niepárzyſtá, tedy wyráz śrzodkowy będzie śrzednim Arytmetycznym między dwóma ſkraynémi: a zatém równy będzie połowie ich ſummy.

Té włáſności Ciągów Arytmetycznych ſłużą oſobliwiéy do wyznaczénia ſummy liczby podanéy wyrazów naſtępnych w tychże ciągach bez dodáwania ciągłégo tychże wyrazów.

Przykłád. Summa 10 piérwſzych liczb naturalnych równá ſię 5 páróm wyrazów. Summa zaś każdéy páry ieſt 11: a zatém ſumma wſzyſtkich 10 wyrazów będzie 5 razy 11, toieſt 55.

Jeżeli liczba wyrazów ieſt niepárzyſtá, *np.* 15, tedy ſumma ich równá ſię 7 párom liczb (z których pár ſumma każdéy ieſt 16,) i ieſzcze liczbie śrzodkowéy toieſt 8: któráto liczba śrzodkowá równá ſię połowie ſummy dwóch wyrazów ſkraynych: a zatém ſumma tych 15 wyrazów będzie równá ſummie ſkraynych toieſt 16, wziętéy razy 7 i pół, albo 120. *W ogól-*

W ogólności, aby znaléźć summę wyrazów n, liczb naturalnych, trzeba wziąźć summę $n+1$, piérwszego i ostatniego wyrazu, czyli dwóch skraynych wyrażów, i trzeba ią rozmnożyć przez połowę liczby wyrażów, toiest przez $\frac{n}{2}$.

Wieloczyn $\frac{(n+1)n}{2}$, albo $\frac{nn+n}{2}$ wyrazi summę szukaną.

Przykład. Niech będzie $n=10$. Summa $\frac{(n+1)n}{2}=\frac{11\times 10}{2}=55$.

$$n=100\ldots\frac{(n+1)n}{2}=\frac{101\times 100}{2}=5050.$$

$$n=1000\ldots\frac{(n+1)n}{2}=\frac{1001\times 1000}{2}=500500.$$

213. Liczby 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, które wyrążaią summy liczb naturalnych nazywaią się *Tróykątnémi*, (Numeri Triangulares). Niechby był tróykąt iaki równoboczny, i każdy bok iego podzielony na iednakową liczbę części równych. Przez punkta podziału boku iednégo, i przez punkta podziału odpowiedaiące w drugich bokach tego troykąta poprowadziwszy linie (które będą równo-odległé względém iednégo boku przez którégo podział nie przechodzą) i wystáwiwszy sobie punkta iakoby położoné na wszystkich punktach przecięciów, i na wszystkich punktach podziałów; o tych punktach tak ustawionych mówi się, iż ustawioné są *tróykątnie*, (triangulariter) i liczba ich wyrąża się przez summę liczb naturalnych zaczynaiąc od iedności; a wielość wyrazów czyli liczb oznácza się przez liczbę punktów znayduiących się na iednym z boków tróykąta.

I tak na figurze ponieważ liczba punktów znayduiących się na iednym boku tróykąta iest 10; liczba wszystkich punktów na tróykącie położonych, będzie 55. Fig. 49.

W takowém ułożéniu punkt którykolwiek wzięty między bokami tróykąta iednakowo iest odległym od sześciu punktów iému náybliższych: a zatém iest w śrzodku sześciokąta forémnégo, którégo wiérzchołki przez té 6 punktów są oznaczoné: trzy zaś punkta náybliższé, z których dwa są w jednym rzędzie (równo-odległym od iednégo boku) a trzeci punkt równie-odległy w rzędzie

Mm náy-

náybliżſzym, będą zaſtępować mieyſcé trzech wiérzchołków tróykąta równobocznégo.

Liczba tróykątná przewyżſzá połówę odpowiedaiącéy ſobie liczby kwadratowéy połową piérwiáſtku; a zatém liczba tróykątná tym bardziéy ſię przybliżá do połowy kwadratu odpowiédaiącégo; im będzie większá. Stoſunek tedy, który zachodzi między dwiéma liczbami tróykątnémi tym bliżſzy będzie ſtoſunku kwadratów odpowiedaiących tymże liczbóm, im té liczby tróykątné większé będą.

Przykład. Dzieſiątá i dwudzieſtá liczba tróykątná ieſt 55, i 210, a ſtoſunek ich ieſt równy ſtoſunkowi 11 do 42: téy zaś oſtatniéy liczbie brakuie $\frac{1}{21}$ iéy ſaméy, aby cztéry razy zamykała w ſobie liczbę piérwſzą 11.

Setná, i dwuchſetná liczba tróykątná ieſt 5050, i 20100: ſtoſunek ich równá ſię ſtoſunkowi 101 do 402: téy zaś oſtatniéy liczbie brakuie tylko $\frac{1}{201}$ iéy ſaméy, aby była poczwórná piérwſzéy 101.

A w ogólności, ſtoſunek liczby tróykątnéy n, do liczby tróykątnéy $2n$, równá ſię ſtoſunkowi $(nn+n)$ do $2n(2n+1)$, toieſt, ſtoſunkowi $n+1$, do $4n+2$: ta zaś oſtatniá liczba $4n+2$, różni ſię tylko częścią $\frac{1}{2n+1}$ ſiebie ſaméy, od liczby piérwſzéy $n+1$, poczwórnie wziętéy.

Niech znowu będzie liczb niepárzyſtych ciąg.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . . $2n-1$; którégo ſummę znaléźć trzeba.

Summa dwóch ſkraynych ieſt . . . $2n$.
Liczba wyrazów . . . . n.
A zatém liczba pár równych . . . $\frac{1}{2}n$.

Nakoniec ſummą całégo ciągu ieſt wieloczyn ważności iednéy páry przez liczbę pár; toieſt wieloczyn z $2n$ przez $\frac{1}{2}n$, czyli nn.

Summy więc liczb niepárzyſtych zacząwſzy od piérwſzéy czynią odpowiedaiącé im kwadraty.

Liczby niepárzyſté	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23,	25	it. d.
Ich ſummy . . .	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100,	121,	144,	169	it. d.
Liczby, które tén oſtatni Ciąg układaią, ſą w ſaméy rzeczy kwadratami liczb naturalnych.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13	it. d.

Tę wláſność liczb niepárzyſtych okázać można przez ułożénié punktów uſtawionych kwadratowo tymże ſamym ſpoſobém, iakéśmy uczynili względém zebrania w jednę ſummę liczb naturalnych (*). W ogól-

(*) Jnć Pan LE SAGE przyſtóſowáł użytecznie do goſpodarſtwa wieyſkiégo ułożé-

W ogólności, niechby trzeba zebrać w jednę fummę naftępuiący Ciąg Arytmetyczny.

a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$, $a+6d$; $a+7d$ . . . $a+d(n-1)$.
Summa z piérwfzégo i oftatniégo wyrazu, ieft . . . . . $2a+d(n-1)$.

Liczba wyrazów ieft n: a zatém liczba pár iednakowych co do fummy będzie $\frac{1}{2}n$. Więc fumma ciągu całégo, będzie fummą fzczególną $2a+d(n-1)$ wziętą razy $\frac{1}{2}n$: toieft, będzie ta fumma $an+d\times\frac{n(n-1)}{2}$.

Albo tak: Summa fzukana, fkłádá fię z piérwfzégo wyrazu a, wziętégo tylé razy, ilé ieft wyrazów, (który to wieloczyn będzie an) i z różnicy naftępnéy d, wziętéy tylé razy, ilé oznácza fumma liczby $n-1$, piérwfzych liczb naturalnych: która to fumma będzie $\frac{n(n-1)}{2}$; a zatém fumma całégo ciągu ieft $an+d\times\frac{n(n-1)}{2}$.

Uwága. W tém wfzyftkiém, cokolwiek fię wyżéy mówiło, zawfze fię brał *Ciąg rósnący*: gdyby zaś był *Ciąg maleiący*, toieft, co ráz maiący mnieyfzé wyrazy; tedy nie trzebaby przydáwać, ale odeymować różnicę iednoftayną d: czyli co na iedno wychodzi, trzebaby odmiéniać w tém wfzyftkiém, o czym fię dotąd mówiło, znak dodáwania poprzedzaiący różnicę d, na znak odeymowania.

 Wyra-

---

nia tróykątné, i kwadratowé. Ponieważ korzénia krzewiów, *np.* drzew wyciągaią fok w około; ieżeli tedy wyznaczoná będzie obfzérność mieyfca potrzebná drzewu, lub innému iakiému krzewiu do iego pofiłku, więcéy tych krzewiów zmieści fię w ziemi danéy wielkości, (któréy wymiary fą większé znacznie względém odległości dwóch ftóp blizkich) zachowuiąc ułożénié tróykątné, a niżeli gdyby fię trzymano ułożénia kwadratowégo: a to w tym famym ftofunku, w którym ieft bok tróykąta równobocznégo do iegoż wyfokości: z przyczyny, że w tymże ftofunku rzędy krzewiów będą bliżfzé podług piérwfzégo ułożénia, niż podług drugiégo, lubo odległość krzewiów náybliżfzych fiebie przez to fię nie odmiéni.

Stofunek tén ieft równy ftofunkowi 2, do $\sqrt{3}$, albo prawie 8, do 7, a iefzcze bliżéy 15, do 13.

Wyrażénié to $an + d \times n(\frac{n-1}{2})$, które oznácza ważność summy ciągu iakiégokolwiek Arytmétycznégo, nazywa się *wyrazém zbiernym*, (terminus summatorius) tego ciągu. W tym wyrażéniu położywszy zamiást n, iaką tylko zechcémy liczbę, będziemy mieli summę tylu wyrazów tego ciągu, ilé iedności zamykać w sobie będzie ta liczba położona zamiást n.

Toż wyrażénié náyogólnieysze weźmie na siebie kształty mniéy ogólné podług szczególnych ważności, które dámy piérwszému wyrazowi a, i różnicy d. I tak niechby był do zebrania w jednę summę ciąg liczb naturalnych.

W tym przypádku będzie $a = 1$, $d = 1$, a wyrażénié poprzedzaiącé weźmie tén kształt $n + n(\frac{n-1}{2}) = n \times (1 + \frac{n-1}{2}) = n(\frac{n+1}{2}) = \frac{nn+n}{2}$.

Jeżeli $a = 1$, $d = 2$, tedy ciąg do zebrania będzie ciągiém liczb niepárzystych, a wyrażénié poprzedzaiącé náyogólnieysze weźmie tén kształt $n + 2 \times n(\frac{n-1}{2}) = n + (nn - n) = nn$.

Zgádza się to zupełnie z tém, cośmy wyżéy powiedzieli o summie tych dwóch ciągów w szczególności.

214. *Zadanié 1. Iléż trzeba liczb naturalnych, aby uczyniły summę 136.*

Mianowanié. Liczba wyrazów szukaná . . . . . n.

Summa liczb n piérwszych naturalnych $n(\frac{n+1}{2})$.

Warunek. $n(\frac{n+1}{2}) = 136$.

Przerábianié. (Rozmnożywszy obie strony równania przez 2)

$n(n+1) = 272$, czyli $nn + n = 272$.

(Rozmnoż: obie strony przez 4) $4nn + 4n = 1088$.

(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)

$4nn + 4n + 1 = 1089$.

(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadr: po obu stronach)

$2n + 1 = 33$.

(Odiąwszy 1 po obu stronach) $2n = 32$.

(Podzieliwszy przez 2) $n = 16$.

Rozwią-

Rozwiązanié. $n = 16$. Liczba wyrazów ſzukaná.

$$n\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{16 \times 17}{2} = 8 \times 17 = 136.$$

W ogólności. Iléż trzeba liczb naturalnych, zacząwſzy od 1, aby uczyniły ſummę daną ſ.

Mianowanié. Niech będzie n, liczba wyrazów ſzukaná.

Summa tych wyrazów . . $n\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Warunek. $n\left(\frac{n+1}{2}\right) = ſ.$

Przeráb: $\frac{nn+n}{2} = ſ.$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 2) $nn + n = 2ſ.$
(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 4) $4nn + 4n = 8ſ.$
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$4nn + 4n + 1 = 8ſ + 1.$
(Wyciągnąwſzy piérwiáſtek kwadr:) $2n + 1 = \sqrt{(8ſ+1)}.$
(Odiąwſzy 1) $2n = \sqrt{(8ſ+1)} - 1.$

(Podzieliwſzy przez 2) $n = \frac{\sqrt{(8ſ+1)} - 1}{2}$

Rozwiązanié. $n = \frac{\sqrt{(8ſ+1)} - 1}{2}$

Przykład. Niech będzie $ſ = 55.$

$$n = \frac{\sqrt{(440+1)} - 1}{2} = \frac{\sqrt{441} - 1}{2} = \frac{21-1}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Niech będzie $ſ = 171.$

$$n = \frac{\sqrt{(1368+1)} - 1}{2} = \frac{\sqrt{1369} - 1}{2} = \frac{37-1}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Aby n, znaczyło liczbę ſpółmierną, a zatém aby ważność iego, którą forma wyráżá, odpowiedałá na Zadanié; trzeba do tego, aby to wyrażénié $8ſ + 1$ było kwadratém. Jeżeli zaś $ſ$, ieſt liczbą tróykątną, tedy $8ſ + 1$ zawſze będzie kwadratém ſkąd wypádá.

215. *Twierdzénié. Jeżeli liczbę iakąkolwiek tróykątną rozmnożymy przez 8, a do wieloczynu tego dodámy 1, summa będzie kwadratém.*

Jakoż, niech będzie liczba iakákolwiek tróykątná $\frac{nn+n}{2}$; wieloczyn téy liczby przez 8, rozmnożonéy będzie $4nn+4n$: a dodáwszy 1, będzie $4nn+4n+1$; ta zaś ostatniá summa iest kwadratém z $2n+1$.

216. *W ogólności. Maiąc dané trzy którékolwiek z tych cztérech ilości; a, d, n, s, można z tego zbiérnégo wyrazu ciągu Arytmetycznégo* $s=an+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ *wyznaczyć czwártą ilość.*

1. $s=an+d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

2. (Odiąwszy $d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ po obu stronach, będzie)

$$an=s-d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

(Podzieliwszy przez n, będzie)

$$a=\frac{s}{n}-d\times\frac{n-1}{2}.$$

3. (Odiąwszy an, po obu stronach w 1wszym równaniu)

$$s-an=d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right).$$

(Rozmnoż: przez 2) $2s-2an=d\times n(n-1)$.

(Podzieliwszy przez $n(n-1)$) $d=\frac{2s-2an}{n(n-1)}$.

4. (Wykonáwszy oznaczoné rozmnożénia w piérwszém rownaniu, będzie) $\frac{dnn-dn}{2}+an=s$.

(Rozmnożywszy przez 2) $dnn-dn+2an=2s$.

(Rozmnożywszy przez $4d$, dlá uchronienia się ułómków)

$$4ddnn-4ddn+8adn=8ds.$$

albo

albo $4ddnn + 4dn(2a - d) = 8ds$.
(Dopełniwszy kwadratu w piérwszéy stronie)
$$4ddnn + 4dn(2a-d) + (2a-d)^2 = 8ds + (2a-d)^2.$$
(Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy)
$$2dn + (2a-d) = \sqrt{(8ds + (2a-d)^2)}.$$
(Odiąwszy $2a-d$ po obu stronach)
$$2dn = \sqrt{(8ds + (2a-d)^2)} - (2a-d).$$
(Nakoniec podzieliwszy przez $2d$)
$$n = \frac{\sqrt{(8ds + (2a-d)^2)} - (2a-d)}{2d}.$$

217. *Zadanié 2. Dwie osoby wyieżdżaią razém na przeciwko siebie: iedna z nich przed spotkaniém się uiéżdżała na dzién po mil 10, drugá zaś piérwszégo dnia uiechała mil 5, drugiégo mil 6, i t. d. milą co dzién więcéy uiéżdżaiąc. Gdy się z sobą té osoby spotykaią, tylé iedna z nich uiechała, co i drugá.*

Dni iezdy, tak iednéy, iak i drugiéy osoby . . x.
Mile które piérwszá z nich uiechała . . . . . $10x$.
Mile które uiechała drugá
$$5+6+7+8+9+ \; . \; . \; . \; 5+(x-1) = \left(\frac{9+x}{2}\right)x.$$

Warunek. $\left(\frac{x+9}{2}\right) x = 10x.$

Przeráb: (Podzieliwszy obie strony przez x) $\frac{x+9}{2} = 10.$

(Rozmnożywszy przez 2) $x + 9 = 20.$
(Odiąwszy 9) $x = 11.$

Rozwiązanié. $x = 11.$ Liczba szukaná dni iazdy.
$10x = 110.$ Droga przez piérwszą osobę uiechaná.
$\left(\frac{x+9}{2}\right) = 110.$ Droga przez drugą osobę uiechaná.

Insze przykłady. Piérwszá osoba uieżdżá ráz wráz po 8 mil na dzién. Drugá osoba uiéżdżá 6 mil piérwszégo dnia, a innych dni następnych, co ráz milą więcéy.

Piérwszá uieżdżá raz wráz po 9 mil na dzién. Drugá uieżdża 7 mil piérwszégo dnia, a innych dni następnych co ráz milą więcéy.

218.

---

218. *Zadanié 3. Dwie osoby odległé na mil 164, iadą naprzeciwko siebie. Jedna z nich uieżdżá co dzién po 10 mil, drugá uieżdżá 7 mil piérwszégo dnia, każdégo zaś potém dnia następnégo co ráz więcéy 1 milą uieżdżá. Kiedyż się ziadą.*

Mian: Dni iazdy tych dwóch osób . . . x.
Droga przez 1 wszą uiechaná . . . . $10x$.

Droga przez 2gą uiechaná $7+8+9+10$ . . $7+(x-1)=\left(\frac{13+x}{2}\right)x$.

Droga przez obie osoby uiechaná . . . $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x$.

Warunek. $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x=164$.

Przeráb: (Rozmnoż: przez 2) $20x+13x+xx=328$.
albo $xx+33x=328$.
(Rozmn: przez 4 dla uchroniénia się ułómków) $4xx+132x=1312$.
(Dopełniwszy kw: w 1 wszéy stronie przez dodanié kwadratu z 33)
$4xx+132x+1089=2401$.
(Wyciąg: piérw: kwadr:) . . . $2x+33=49$.
(Odiąwszy 33) . . . . $2x=16$.
(Podzieliwszy przez 2) . . . $x=8$.

Rozwiązanié. $x=8$. Dni drogi szukané.
$10x=80$. Droga uiechaná przez piérwszą osobę.
$x\times\left(\frac{13+x}{2}\right)=84$. Droga uiechaná przez 2gą.

Spráwdzénié. $10x+\left(\frac{13+x}{2}\right)x=80+84=164$. tak iak bydź powinno.

Inszé przykłady. Odległość dwóch osób iest 168 mil: piérwszá uieżdżá 9 mil na dzién, drugá 5 mil dnia piérwszégo, a innych dni następnych co ráz po dwie mile więcéy.

Pewná osoba má dochodu rocznégo 100 Cz: Zł: Zamiást coby go miała łożyć na iakié wydátki, daie na procént $5\frac{0}{0}$ za każdą razą za którą go odbiérá: i tak przymnáżá co rok procéntów, lubo iuż od nich nie bierze znowu procéntu. Za iléż lát przydzie ta osoba do kapitału 1225 Cz: Zł.

To ostatnié Zadanié nie różni się prawie od poprzedzaiącégo.

Niech

Niech będzie x, liczba szukaná lát.

Ta osoba odbierze dochód 100 Cz: Zł: razy x; odbierze więc $100x$.

Dochód odebrany na końcu 1wszégo roku przynosi procént przez lát $x-1$.

Dochód odebrany na końcu drugiégo roku przynosi procént przez lát $x-2$; i tak aż do ostatniégo dochodu, który iuż procéntu nieprzynosi.

A że procént od 100 Cz: Zł: iest 5 Cz:Zł: więc osoba ta weźmie ze wszystkiém procéntu 5 Cz: Zł. tylé razy rozmnożonych, ilé oznaczy summa liczb piérwszych naturalnych, których powinno bydź $x-1$; ta zaś summa będzie $x\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Warunek. $100x + 5 \times x\left(\frac{x-1}{2}\right) = 1225.$

Przeráb: (Podziéliwszy obie strony przez 5)

$$20x + x\left(\frac{x-1}{2}\right) = 245.$$

(Rozmnożywszy przez 2) $40x + xx - x = 490.$

albó $xx + 39x = 490.$

(Rozmnożywszy przez 4) $4xx + 156x = 1960.$

(Dopełniwszy kwadr: w 1wszéy stronie przez dodanié kwadratu z 39) $4xx + 156x + 1521 = 3481.$

(Wyciągnąwszy piérw: kwadr:) $2x + 39 = 59.$

(Odiąwszy 39) . . . . . $2x = 20.$

(Podzieliwszy przez 2) . . $x = 10.$

Ta osoba odebrała więc dochodu 1000 Cz: Zł: a summa procéntów będzie 5 Cz: Zł: rozmnożonych przez summę dziewięciu piérwszych liczb naturalnych, toiest przez 45: będzie więc $5 \times 45 = 225.$

A zatém za 10 lát ta osoba przydzie do kapitału 1225 Cz: Zł.

Inszé przykłady. Dochód iest 300 Cz: Zł: procént 6%, którégo corocznie przybywá tak, iak wyżéy. Za iléż lát osoba na zysk swóy dochód tén obracaiącá, mieć będzie 2904 Cz: Zł?

Dochód iest 400 Cz: Zł: Procént 7%. Za iléż lát osoba zbieraiącá tén dochód przydzie do 6648 Cz: Zł.

219. *Zadanié 4 Winiénem komu summę S, którą terdz zarâz mám zapłacié. Godzę się z wierzycielém, iż mi tę summę częściami równémi na iedéndście*

 rát

rát rocznych wypłacać sobie pozwálá, odbieraiąc natychmiást odemnie iednę ratę. Iléż mám na każdą ratę wypłácać, abym po ostatniéy raty wypłacéniu móy dług zgładził, rachuiąc procént po 5%.?

Gdybym terász zaráz wypłacił summę $\int$, którą winiénem, tedy ponieważ procént od téy summy na rók iest $\frac{1}{20}$ téyże summy, więc za 10 lát téa procént byłby $\frac{10}{20}\int$, albo $\frac{1}{2}\int$. A zatém osoba, któréy dłużny iestém, miałaby w takowy sposób za 10 lát $\int + \frac{1}{2}\int = \frac{3}{2}\int$.

Mianowanie. Niech x, oznáczá ratę, którą corocznie wypłácać powiniénem.

Summa tych wszystkich 11 rát będzie			$11x$.
1wszá rata przynosi procént przez	10 lát, toiest		$\frac{1}{20}x \times 10$.
2gá	9		$\frac{1}{20}x \times 9$.
3ciá	8		$\frac{1}{20}x \times 8$.
4tá	7		$\frac{1}{20}x \times 7$.
⋮			
10tá	1		$\frac{1}{20}x \times 1$.

A zatém summa wszystkich procéntów będzie $\frac{1}{20}x$, rozmnożoná przez summę 10 piérwszych liczb naturalnych: która to summa iest 55: więc będzie $\frac{55}{20}x = \frac{11}{4}x$.

Warunek. $11x + \frac{11}{4}x = \frac{3}{2}\int$.

Przeráb: (Obróciwszy całą piérwszą stronę na ułómki) $\frac{55}{4}x = \frac{3}{2}\int$.
(Przywiódłszy obie strony do iednakowégo mianownika, i opuściwszy go) $55x = 6\int$.
(Podzieliwszy przez 55) $1x = \frac{6}{55}\int$.

Rozwiązanié. $x = \frac{6}{55}\int$. Ważność każdéy raty roczńéy.
$11x = \frac{6}{5}\int$. Ważność wszystkich rat rocznych.
$\frac{11}{4}x = \frac{3}{10}\int$. Summa procéntów od wszystkich rát rocznych.
$11x + \frac{11}{4}x = \frac{6}{5}\int + \frac{3}{10}\int = \frac{15}{10}\int = \frac{3}{2}\int$. Ważność wszystkich rát wráz z procéntami.

Przykłady: *Niech będzie* $\int = 5500$. *będzie* $x = 600$.
$\int = 4400$. *będzie* $x = 480$.

Niechby znowu procént był 6%. liczba lát 8, a $\int = 24200$.

Uwága.

Uwága. Gdyby dług cały wypłacić razém przypádało w pewnym czaſie, *np.* za lát 10; tedy z tym długiém zrównalibyśmy ważność ſummy rát rocznych i ich procéntów, któréby na końcu tychże lát wyznaczonych przypádały.

220. *Zadanié 5. Mám komu wypłacić corocznie pewną ſummę* a, *przez lát* 11, *rachuiąc od teraźnieyſzégo zaráz czaſu. Chcę ſię od razu pozbydź tego długu. Jakąż więc ſummę przydzie mi natychmiáſt wypłacić, rachuiąc procént* $5\frac{0}{0}$.

Dowiedzie ſię tak, iak wyżéy, że ważność 11 rát, będzie .... $11a + \frac{1}{20}a(1+2+3+ \ldots 10) = 11a + \frac{55}{20}a = 11a(1+\frac{1}{4}) = 11a \times \frac{5}{4} = \frac{55}{4}a.$

Mianowanié. Niech x oznácza ſummę, którą mi zaráz wypłacić przypádá, abym ſię całégo długu pozbył.

Procént róczny od téy ſummy będzie $\frac{1}{20}x$, a zatém przez lát 10, będzie ténże procént $\frac{10}{20}x = \frac{1}{2}x$.

Warunek. $x + \frac{1}{2}x = \frac{55}{4}a.$

Przerób: (Obróciwſzy całą 1wſzą ſtronę na ułómki) $\frac{3}{2}x = \frac{55}{4}a.$
(Przywiódłſzy dwie ſtrony do iednakowégo mianownika, i opuściwſzy go) $6x = 55a.$
(Podzieliwſzy przez 6) $x = \frac{55}{6}a.$

Rozwiązanié. $x = \frac{55}{6}a.$ Summa ſzukaná.

Procént róczny od téy ſummy ..... $\frac{55}{6}a \times \frac{1}{20} = \frac{11}{24}a.$
Procént 10letni, od téyże ſummy .... $\frac{55}{12}a.$
Ważność całéy ſummy nakońcu 10 lát ... $\frac{55}{6}a + \frac{55}{12}a =$ $55a(\frac{1}{6} + \frac{1}{12}) = 55a(\frac{2}{12} + \frac{1}{12}) = 55a \times \frac{3}{12} = 55a \times \frac{1}{4} = \frac{55}{4}a.$ I ta to ieſt ſumma całégo długu wraz z procéntém.

Przykłady. *Niech będzie* $a = 120$; *będzie* $ſ = 55 \times 20 = 1100$; | $a = 144$. *będzie* $ſ = 1320$.

Niechby znowu była liczba lát 12, 15, 18, 20, *a procént* 6, 7, *i t. d. od ſta.*

Uwága. Tén ſpoſób rachowania ważności teraźnieyſzéy długu, który przez przeciąg pewnéy liczby lát ratami miáł bydź wypłácany nie ieſt zupełnie dokładnym, iako to obáczymy w Rozdziele naſtępuiącym. Gdy iednak liczba lát ieſt máłá; wtedy nieznaczné bardzo będzie uchybiénié.

221. *Zadanié 6. Pewná oſoba, któráby mogła corocznie pożytkować z ſwégo maiątku po* $4\frac{0}{0}$. *daie go innéy oſobie bez obowiązku nazád go powrócénia,*

cénia, byleby corocznie odbiérała od niéy 10$\frac{0}{0}$; i tén procént 10$\frac{0}{0}$ roczny, daie znowu potém na procént 4$\frac{0}{0}$, nie rachuiąc procéntu od procéntu. Za iléż lát zbierze ténże fám maiątek, któryby była zebrała, dáwfzy fwóy piérwiáftkowy maiątek, na procént 4$\frac{0}{0}$?

Niech tén procént 10$\frac{0}{0}$, albo raczéy penfya roczná umówioná, będzie f, będźie kapitál cały, z którego ta penfyá má bydź wypłácaná $10f$.

Mianowanié. Niech będzie x, liczba fzukaná lát.

Kapitál téy ofoby, gdyby go była dała na procént 4$\frac{0}{0}$, byłby powiękfzony fummą $\frac{1}{25}$ $10f$, albo $\frac{2}{5}f$ wziętą tylé razy, iléby było lát, przez któréby tén procént wypłacano: a zatém na końcu lát x, tén kapitál byłby $10f+\frac{2}{5}fx$.

Ta ofoba odbierze fwoię penfyą f, razy x, więc z tego zbioru, będzie miała naoftatek fx.

Penfyá odebraná na końcu piérwfzégo roku przyniefie procént przez lát . . . . $x-1$.

Na końcu 2go roku . . . . $x-2$.

. . . . . 3go roku . . . . $x-3$.

. . .

. . . . . $x-1$ roku . . . . 1.

. . . . . x roku . . . . 0.

A że procént roczny od téy penfyi ieft $\frac{1}{25}f$; więc procént od wfzyftkich tych penfyy będzie

$$\tfrac{1}{25}f(1+2+3+4+5\ldots x-1)=\tfrac{1}{25}f\left(\frac{(x-1)x}{2}\right)$$

Warunek. $$fx+\tfrac{1}{25}f\left(\frac{(x-1)x}{2}\right)=10f+\tfrac{2}{5}fx.$$

Przeráb: (Podzieliwfzy obie ftrony przez f)

$$x+\frac{(x-1)x}{50}=10+\tfrac{2}{5}x.$$

(Rozmnożywfzy obie ftrony przez 50)

$50x+(x-1)x=500+20x$: albo $xx+49x=500+20x$.

(Odiąwfzy $20x$ po obu ftronach) $xx+29x=500$.

(Rozmnożywfzy obie ftrony przez 4) $4xx+116x=2000$.

(Dopełniwfzy kwadratu w piérwfzéy ftronie, przez dodanié z obu ftrón kwadratu z 29) $4xx+116x+841=2841$.

(Wy-

(Wyciąg: piérwiáſt: kwadr:) $2x+29=\sqrt{2841}=53, 3+$.
(Odiąwſzy 29) $2x=24, 3+$.
(Podzieliwſzy przez 2) $x=12, 15, +$ toieſt 12 lát, i mało co mniéy od 2 mieſięcy.

Przykł: Niech będzie penſyá roczná . . 1200 Zł.
a zatém kapitáł . . . . 12000 Zł.
Procént 4$\frac{0}{0}$ na rok od 12000 Zł. ieſt . . . 480 Zł.
Ténże procént za lát 12, i 2 mieſiące . . . 5840.
Więc kapitáł za lát 12 i 2 mieſiące byłby . . . 17840.
Ta oſoba wziełaby za lát 12, Zł. 1200, razy 12, toieſt 14400.
Procént roczny od penſyi 1200 Zł. byłby . . . 48.
Summa wſzyſtkich naſtępnych penſyi ieſt 48 (1+2+3+ . . . 11)=

$$\frac{48 \times 11 \times 12}{2} = 3168.$$

Summa wſzyſtkich penſyy i procéntów za lát 12, 17568 *Zł.*
Procént 2 mieſięcy od 14000 Zł. . . . . . . 109.
Część 13ſtéy penſyi, należącéy ſię za 2 mieſiące 200.
Summa . . . . 17877.

Ta oſtatniá ſumma, mało co ſię różni od wáżności wyżéy znalezionéy, do któréy byłby uróſł kapitáł w przeciągu tegoż ſamégo czaſu.

Inſzé przykłady. Penſyá roczná wypłácaná z kapitału ieſt 10$\frac{0}{0}$. Oſoba w tén ſpoſób pożytkuiącá z kapitáłu mogłaby byłá obrócić go na procént 5$\frac{0}{0}$, tak, iak w ſaméy rzeczy obrácá na ténże procént penſye ſwoié naſtępné.

Niechby znowu roczná penſyá byłá 12$\frac{0}{0}$. Niech penſye naſtępné obrócone będą na procént 5$\frac{0}{0}$, ſám zaś kapitáł mógł bydź obróconym na procént 4$\frac{0}{0}$.

222. *Zadanié 7. Pewná oſoba maiąca 100000 Zł. w dobrach, które iéy czynią tylko 4000 Zł. przypożyczá na początku każdégo roku na różné wydatki po 6000 Zł. od których obowięzuie ſię płacić procéntu 10$\frac{0}{0}$. Nie wypłáca ani kapitáłu, ani procéntu co rok ſię pomnáżaiącégo (nie będąc wſzelako obowiązaną płacić procént od procéntu.) Za iléż lát ta oſoba wcale ſię zniſzczy?*

Mianowanié. Niech liczba ſzukaná lát, będzie . . . x.
Przypadnié téy oſobie pożyczyć 6000 Zł. razy x, toieſt . . . . $6000x$.
Procént roczny od 6000 Zł. ieſt 600 Zł.
1wſzé, 2gié, 3cié, 4té . . . . . $x$té pożyczénie Zł. 6000, ciągnie za ſobą procént przez . . . x, $x-1$, $x-2$, $x-3$ . . . . 1 lát.

 A za-

A zatém ſumma długów téy oſoby na końcu lát x, maiąc wzgląd na ſamé procénta,

będzie $600\,(1+2+3+4+5\;\ldots\;x) = 600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$.

A cały iéy dług będzie $6000x + 600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)$

Warunek. $6000x+600\left(\frac{x(x+1)}{2}\right) = 100000.$

Przeráb: (Rozmn: obie ſtrony przez 2) $12000x + 600xx + 600x = 200000.$
albo $600xx + 12600x = 200000.$
(Podziel: obie ſtrony przez 200) $3xx + 63x = 1000.$
(Rozmn: przez 12 dlá uchroniénia ſię ułómków)
$36xx + 756x = 12000.$
(Dopełn: kwadratu w 1 wſzéy ſtronie, przez dodanié 63^2 po obu ſtronach) $36xx + 756x + 3969 = 15969.$
(Wyciąg: piérwiáſt: kwadr:) $6x + 63 = \sqrt{15969} = 126,\,36.$
(Odiąwſzy 63) $6x = 63,\,36.$
(Podzieliwſzy przez 6) $1x = 10,\,56$, toieſt lát 10, i trochę więcéy niż pół ſiódma mieſiąca.

Summa pożyczek przez 10 lát . . . . 60000 Zł.
Summá procéntów od tychże pożyczek, ieſt
$600\,(1+2+3+\;\ldots\;10) = 600 \times 55 = 33000$ Zł.
Procént od 60000 Zł. za 6 mieſięcy . . . 3000.
Pożyczyła ieſzcze ta oſoba na 6 mieſięcy . . 3000.
Procént od téy oſtatniéy pożyczki . . . . . 150.
Będą więc długi do dodania
60000 Zł.
33000.
3000.
3000.
150.
99150. Dług na końcu 10 lát i 6 mieſięcy.

Procént

Procént od 60000 Zł. za 7 mieśięcy	3500. Zł.
Dług 7 mieśięcy	3500.
Procént od tego ostatniégo długu	204.
Wártość 10 piérwszych pożyczek, wráz z procentém od nich	93000.
Dług cały na końcu lát 10, i 7 mieśięcy . .	100204.

Insźé przykłady. Maiątek téy osoby, iest 150000 Zł: z którégo má 7000 Zł: rocznégo dochodu, wydaie zaś ta osoba co rok Zł: 12000, i zapożyczá śię po 10⁰⁄₀.

Maiątek téy osoby iest 200000 Zł. z których má 9000 złotych dochodu. Wydatek iéy roczny iest 16000 Zł. i zapożyczá śię po 12⁰⁄₀.

Przystósowanié zbioru w jednę summę ciągów Arytmetycznych do zbioru liczb tróykątnych, i liczb kwadratowych.

223. *Liczby tróykątné.*

1wszá $= 1 = 1.$
2gá $= 3 = 1 + 2.$
3ciá $= 6 = 1 + 2 + 3.$
4tá $= 10 = 1 + 2 + 3 + 4.$
5tá $= 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5.$
6tá $= 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6.$
7má $= 28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7.$
8má $= 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$
⋮

$$n\text{tá} = \frac{n\times(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \ldots . n.$$

S. (Summa szukaná) $= 1\times n + 2(n-1) + 3(n-2) + 4(n-3) + 5(n-4) + 6(n-5)$
$+ 7(n-6) + 8(n-7) + \ldots n\times 1.$
$= 1\times n + 2(n-1) + 3(n-2) + 4(n-3) + 5(n-4) + 6(n-5)$
$+ 7(n-6) + 8(n-7) + \ldots n(n-(n-1)).$
$= n(1+2+3+4+5+6+7+8+ \ldots n)$
$-(1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + 5\times 6 + 6\times 7 + 7\times 8 + \ldots (n-1)n)$

Ostatni szereg wyrážaiący summę szukaną, składá śię ze dwóch, z których w piérwszym iest n, rozmnożoné przez summę liczb n piérwszych naturalnych, albo przez ntą liczbę tróykątną. W drugim zaś z tych szeregu każdy wyráz

ráz

ráz ieſt podwóynym liczby tróykątnéy, zacząwſzy od piérwſzéy, a kończąc na przedoſtatniéy. Summa więc drugiégo tego ſzeregu będzie podwóyną ſummy ſzukanéy zmnieyſzonéy *ntą*, toieſt oſtatnią liczbą troykątną: a zatém wypadnie naſtępuiącé równanié wyrażaiącé ſummę całégo ſzeregu liczb tróykątnych. $S = n\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 2\left(S - \frac{n(n+1)}{2}\right)$.

albo $S = \frac{n \times n(n+1)}{2} - 2S + 2n\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

(Dodáwſzy $2S$ do obu ſtrón, będzie)

$$3S = \frac{n \times n(n+1)}{2} + \frac{2n(n+1)}{2}.$$

$$= \frac{n \times (n+1)(n+2)}{2}.$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3, będzie)

$$S = \frac{n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3}.$$

Aby więc znaléźć ſummę liczby podanéy liczb tróykątnych, zacząwſzy od piérwſzéy; trzeba zrobić wieloczyn ciągły ze trzech liczb naturalnych naſtępnych, z których piérwſzá oznáczałaby liczbę wyrazów tego ciągu liczb tróykątnych, i wziąźć ſzóſtą część tego wieloczynu.

Przykłád. Daymy że $n = 5$. będzie $\frac{n \times (n+1) \times (n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 35$.

Dáymy że $n = 10$. będzie $\frac{n \times (n+1)(\times n+2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3} = 220$.

Przyſtóſowanié. Niechby kulé uſtawioné były w oſtrográn tróykątny, którégo bok podſtawy ieſt n; *liczba kul, z których ſię tén oſtrográn ſkłádá, będzie* $\frac{n \times (n+1)(\times n+2)}{1 \times 2 \times 3}$.

224. *Liczby kwadratowé.*

$1 \text{wszá} = 1 = 1.$
$2 \text{gá} = 4 = 1 + 3.$
$3 \text{ciá} = 9 = 1 + 3 + 5.$
$4 \text{tá} = 16 = 1 + 3 + 5 + 7.$
$5 \text{tá} = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$
$6 \text{tá} = 36 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$
$7 \text{má} = 49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$
$8 \text{má} = 64 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15.$
$\vdots$
$n \text{tá} = nn = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \ldots 2n - 1.$

$$s \text{ (Summa szukaná)} = 1.\ n + 3(n-1) + 5(n-2) + 7(n-3) + 9(n-4) + 11(n-5) + 13(n-6) + 15(n-7) + \ldots (2n-1)(n-(n-1)).$$
$$= n(1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + \ldots 2n-1)$$
$$-(1\times3 + 2\times5 + 3\times7 + 4\times9 + 5\times11 + 6\times13 + 7\times15 + \ldots (n-1)(2n-1).$$

Ostatni szereg wyrażaiący summę szukaną ciągu liczb kwadratowych składa się ze dwóch, z których piérwszy równá się *n*téy liczbie kwadratowéy wziętéy razy *n*. W drugim zaś szeregu każdy wyráz składá się z podwóynéy liczby kwadratowéy, i z liczby naturalnéy odpowiedaiącéy w porządku wyrazów, zacząwszy od piérwszéy, a kończąc na przedostatniéy. Będzie więc summa drugiégo szeregu równá summie dwóch następuiących szeregów.

$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots (n-1)^2.$$
$$\text{i}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots n-1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

a zatém summa całégo szeregu liczb kwadratowych będzie

$$s = n \times nn - 2(s - nn) - \frac{(n-1)n}{2}.$$

albo $s = n \times nn - 2s + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$

(Dodáwszy $2s$, po obu stronach, będzie)

$$3s = n \times nn + 2nn - \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$= n(nn + 2n - \frac{n-1}{2}).$$

$$= \frac{n(2nn + 3n + 1)}{2}.$$

$$= n(\frac{(n+1)\ (2n+1)}{2}).$$

Podziel obie ſtrony przez 3.

$$ſ = \frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3}.$$

Przyſtóſowanié. Niechby kule ułożoné były w oſtrográn kwadratowy, którégo bok podſtawy ieſt n; *liczba kul zawartych w tym oſtrogranie*, będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3}$.

Przykłady. Dáymy że $n = 10$.

będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{10 \times 11 \times 21}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 11 \times 7 = 385.$

Dáymy że $n = 15$.

będzie $\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3} = \frac{15 \times 16 \times 31}{1 \times 2 \times 3} = 5 \times 8 \times 31 = 1240.$

225. *Zbiór kwadratów z wyrazów iakiégokolwiek ciągu Arytmetycznégo możná przywiéśdź do zbioru poprzedzaiącégo.*

Ciąg Arytmetyczny.

$a \quad a+d \quad a+2d. \quad a+3d. \quad a+4d. \quad a+(n-1)d.$

Kwadraty.

$aa. \ aa+2ad+dd. \ aa+4ad+4dd. \ aa+6ad+9dd. \ aa+8ad+16dd. \ aa+2ad(n-1)+dd(n-1)^2.$

Summa tego ciągu kwadratów ſkłádá ſię

1. Z kwadratu 1 wſzégo wyrazu aa, tylé razy wziętégo, iléieſt wyrazów.

2. Z podwóynégo wieloczynu $2ad$, rozmnożonégo przez ſummę liczb naturalnych $(1+2+3+4+5+6+ \ . \ . \ . \ . \ (n-1))$.

3. Z kwa-

3. Z kwadratu różnicy dd, rozmnożoney przez summę liczb kwadratowych $(1+4+9+16+25+36+ \ldots (n-1)^2)$.

Więc summa tego ciągu, iest

$$aan + 2ad \frac{(n \times n-1)}{1 \times 2} + dd \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{1 \times 2 \times 3}\right).$$

226. W wyrażénié téy summy można wprowadzić sam tylko kwadrat różnicy nastęPnéy wyrazów bez wieloczynu iéy przez piérwszy wyraz, a to w następuiący sposób:

1. Niech liczba wyrazów ciągu, będzie niepárzystá, i oznaczoná przez $2n+1$.

Oznaczywszy wyráz śrzedni przez a, wyrazy dwa, między któremi tén wyráz śrzedni znayduie się, oznaczmy przez $a+d$, i $a-d$.

Zacząwszy od wyrazu śrzedniégo, rozłóżmy ciąg na dwa następuiącé:

$$a. \quad \begin{matrix} a+d. & a+2d. & a+3d. & a+4d. & a+5d. & a+6d \ldots & a+nd. \\ a-d. & a-2d. & a-3d. & a-4d. & a-5d. & a-6d \ldots & a-nd \end{matrix}$$

Kwadraty.

$$aa \quad \begin{matrix} aa+2ad+dd. & aa+4ad+4dd. & aa+6ad+9dd. & aa+8ad+16dd \ldots & aa+2and+nndd. \\ aa-2ad+dd. & aa-4ad+4dd. & aa-6ad+9dd. & aa-8ad+16dd \ldots & aa-2and+nndd. \end{matrix}$$

W każdéy párze kwadratów, podwóyné wieloczyny niszczą się, i zostaie $aa(2n+1)+2dd(1+4+9+16+\ldots nn)=aa(2n+1)+2dd\left(\frac{n \times n+1 \times 2n+1}{1 \times 2 \times 3}\right)$.

2. Niech liczba wyrazów ciągu będzie párzystá, i oznaczoná przez $2n$.

Oznaczmy wyrazy dwa śrzednié przez $a+d$, i $a-d$.

Ciąg Arytmetyczny będzie mógł bydź rozłożonym, na dwa następuiącé:

$$\begin{matrix} a+d. & a+3d. & a+5d. & a+7d. & a+9d. & a+11d. & a+(2n-1)d. \\ a-d, & a-3d. & a-5d. & a-7d. & a-9d. & a-11d. & a-(2n-1)d. \end{matrix}$$

Kwadraty.

$$\begin{matrix} aa+2ad+dd. & aa+6ad+9dd. & aa+10ad+25dd. & aa+14ad+49dd \ldots & aa+2ad(2n-1)+(2n-1)^2dd \\ aa-2ad+dd. & aa-6ad+9dd. & aa-10ad+25dd. & aa-14ad+49dd \ldots & aa-2ad(2n-1)+(2n-1)^2dd \end{matrix}$$

Summa tych kwadratów.

$$2aa(n)+2dd(1+9+25+49+ \ldots (2n-1)^2).$$

Aby znaléźć summę kwadratów tych liczb n, niepárzystych $(1, 3, 5, 7, 9 \ldots\ldots 2n-1)$.

Od summy kwadratów liczb piérwszych $2n-1$ naturalnych: 1, 2,

---

3, 4, 5, 6, 7, . . . $2n-1$, która iest $\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{1\times2\times3}$
odiąć potrzeba summę kwadratów liczb piérwszych $2n-1$ párzystych;
$2(1+2+3+4+5+6 \ldots n-1)$; która iest $4\left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\times2\times3}\right)$

Zostanie $(2n-1)2n\left(\frac{4n-1}{1\times2\times3}-2\left(\frac{(n-1)}{1\times2\times3}\right)\right)=\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1\times2\times3}$.

Więc naostatek doydziémy summy szukanéy, i ta będzie

$$2aa\times n+2dd\left(\frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{1\times2\times3}\right).$$

227. *Przykłady do przystósowania.*

1. *Znaléźć 9 liczb w ciągu Arytmetycznym, których summa 99, a summa ich kwadratów 1329.*

Wyráz śrzedni, będzie $\frac{1}{9}$ częścią 99, toiest 11.

Wzór ogólny. $aa(2n+1)+2dd\left(\frac{n\times n+1\times2n+1}{1\times2\times3}\right)$ zamiéni się na tén szczególny $121\times9+2dd\left(\frac{4\times5\times9}{1\times2\times3}\right)$.

Więc $121\times9+2dd\left(\frac{4\times5\times9}{1\times2\times3}\right)=1089+60dd$.

a zatém; $1089+60dd=1329$.

Odiąwszy 1089 po obu stronach, będzie $60dd=240$.

Podzieliwszy obie strony, przez 60, będzie $dd=4$.

Wyciągnąwszy piérwiástek kwadratowy, będzie $d=2$.

Ciąg tedy, zacząwszy od wyrazu śrzedniégo, będzie

11, 9, 7, 5, 3.
11, 13, 15, 17, 19.

2. *Znaléźć 10 liczb w ciągu Arytmetycznym, których summa 110, a summa ich kwadratów 1540.*

Summa tych wyrazów pár 5, iest 110, a zatém summa każdéy páry będzie 22, więc $a=11$.

Wzór

Wzór ogólny, $2aa \times n + 2dd\left(\frac{(2n-1)\,(2n)\,(2n+1)}{1\times2\times3}\right)$ (położywſzy 11, zamiáſt *a*, 5, zamiáſt *n*;) zamiéni ſię na ten ſzczególny:

$$121\times10+2dd\left(\frac{9\times10\times11}{1\times2\times3}\right)=121\times10+2dd\times165.$$

Więc $1210+330dd=1540$;
a zatém $121+33dd=154$.
Więc $33dd=33$. $dd=1$.
$d=1$.

Wyrazy dwa śrzednié: 12; 10; Ciąg 10, 8, 6, 4, 2. 12, 14, 16, 18, 20.

ROZDZIÁŁ VIII.

O ciągach Jeometrycznych, i o Logarytmach.

228. Gdy będzie ſzereg takich ilości, których ſtoſunek dwóch naſtępnych ieſt zawſze iednakowy; o takich ilościach mówi ſię, że ſkłádaią ciąg Jeometryczny.

Przykł: Liczby 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, i t. d. ſkłádaią ciąg Jeometryczny.

Podobnie będą w ciągu Jeometrycznym, i liczby naſtępuiącé:

1, 3, 9, 27, 81, 243, i t. d.
1, 4, 16, 64, 256, 1024, i t. d.

Liczba oznáczaiącá ilé razy w wyrazie każdym naſtępnym zawiérá ſię tén, który go poprzedził, czyli *Wykładnik*, (Exponens) ſtoſunku dwóch wyrazów blizkich, nazywá ſię *Wykładnikiém* ciągu. I tak we trzech poprzedzaiących ciągach, wykładnikami ſą liczby 2 w piérwſzym ciągu: 3 w drugim: a 4 w trzecim.

Ciągi przykładów poprzedzaiących ſą roſnącé: ponieważ każdy w nich naſtępny wyráz większy ieſt od poprzedzaiącégo. Gdy zaś wyrazy zacząwſzy

 od

od piérwszégo co ráz się zmnieyszaią: ciąg taki nazywá się maleiącym. I takié są następuiącé ciągi:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64},\ \text{i t. d.}$$

$$1,\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{9},\ \tfrac{1}{27},\ \tfrac{1}{81},\ \tfrac{1}{243},\ \text{i t. d.}$$

$$1,\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{256}\ \text{i t. d.}$$

229. W poprzedzaiących ciągach Jeometrycznych zaczynaiących się od 1, każdy wyráz po tym piérwszym idący iest wieloczyném z drugiégo wziętégo tylé razy ciągle za czynnika; ilé wyznácza liczba okázuiącá mieyscé, któré tén wyráz w ciągu zastępuie po piérwszym wyrazie. I tak w piérwszym ciągu, drugi wyráz czyli piérwszy, po iedności iest 2: trzeci, czyli drugi po 1, iest 4, który iest wieloczyném ze dwóch, wziętych dwa razy za czynnika: a w ogólności wyráz $(n+1)$ty, czyli $n$ty po 1, iest 2, wzięté n, razy za czynnika, albo mnogość $n$ta liczby 2, czyli 2^n.

Idzie zatém, że każdy ciąg Jeometryczny, zaczynaiący się od 1, złożony iest z następnych mnogości drugiégo wyrazu: toiest, że tén drugi wyráz zostánie bez odmiany: trzeci wyráz będzie iego drugą mnogością, albo stopniém: czwárty wyráz będzie trzecią iego mnogością: 5ty będzie czwártą iego mnogością: i t. d. Przeto każdy ciąg Jeometryczny zaczynaiący się od 1, można tak ogólnie wyrazić:

$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12},\ \ldots\ a^{n-1}.$

230. Aby którékolwiek dwa wyrazy ciągu Jeometrycznégo, rozmnożyć iedén przez drugi; dosyć iest dodádź wykładniki dwóch tych wyrazów, i summę tych dwóch wykładników dadź za wykładnika drugiému wyrazowi ciągu, który to wyráz stanie się wieloczyném dwóch tamtych. Jakoż wyráz np. a^3 oznácza, że a, wzięté iest za czynnika razy 3: wyráz a^4 oznácza, że a, wzięté iest za czynnika razy 4: a zatém wieloczyn z a^3, przez a^4, zawiérać w sobie będzie a, wzięté za czynnika tylé razy, ilé oznácza summa liczb 3, i 4: która to summa iest 7, więc $a^3 \times a^4 = a^7$. A w ogólności wieloczyn z a^p, przez a^q, powinién zamykać a, wzięté za czynnika tylé razy, ilé oznácza summa wykładników p, i q; a zatém $a^p \times a^q = a^{p+q}$ (gdy p, i q, wyrázaią liczby cáłkowité.)

231. Aby zaś podzielić wyráz którykolwiek tego ciągu przez drugi wyráz; trzeba odiąć ich wykładniki iedén od drugiégo. Jakoż ponieważ dzielny powinién bydź równy dzielnikowi rozmnożonému przez wieloráz; więc wykładnik dzielnégo będzie równy summie wykładników dzielnika i wielorazu; (co się dopiéro wyżéy okázało) á zatém wykładnik wielorazu będzie różnicą wykładników dzielnégo i dzielnika.

I tak

I tak $a^5 : a^3 = a^2$; $a^6 : a^2 = a^4$; $a^8 : a^5 = a^3$; W ogólności: $a^p : a^q = a^{p-q}$.

232. Gdy $p = q$, wtedy $a^p : a^q = a^p : a^p = 1$. A że w takim razie $a^{p-q} = a^0$, więc $a^0 = 1$.

233. Gdy p, iest mieyſzé niż q, wtedy $p-q$, będzie mnieyſzé niż o, toieſt będzie ilością uiémną: a zatém w takim razie wykładnik $p-q$, w wyrażéniu tém a^{p-q}, będzie uiémny. I tak $a : a^2 = a^{1-2} = a^{-1}$. Że zaś $a : a^2 = \frac{a}{aa} = \frac{1}{a}$; więc zachowuiąc iednokſztáłtność wykładników, można wyrazić ułómek $\frac{1}{a}$ i w tén ſpoſób a^{-1}. Tak też $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ i t. d.

Gdybyśmy chcieli, aby powyżſzy ciąg nie zaczynał ſię od iedności, ale miał ieſzcze przed nią wyrazy ułómkowé, (ieżeli a ieſt większé niż 1); tedy możnáby takowy ciąg dwoiako wyrazić.

albo tak $\frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}$, albo 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, i t. d.

albo téż $a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0$ albo 1, $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$, i t. d.

234. Jeżeli zaś a, ieſt ułómkiém, *np.* ieżeli ieſt $= \frac{1}{2}$; tedy ciąg byłby maleiącym w tych wyrazach, któréby po 1 naſtępowały, a byłby rosnącym w tych wyrazach, któréby przed 1 znaydowały ſię: zaczynaiąc w obiedwie ſtrony ciąg od 1. W takim razie wykładniki wyrazów ułómkowych byłyby przydayné, a wykładniki wyrazów większych od iedności byłyby uiémné. Otóż znowu nowy przykład, na którym widzimy, iako wyrażénia ilości przydaynych i ułómnych zawiſły od tego względu, pod którym ié uważámy.

235. Aby mieć kwadrát wyrazu iakiégo w ciągu Jeometrycznym, trzeba podwoić wykładnika tego wyrazu: aby mieć iego ſześcián, trzeba tegoż wykładnika potroić; aby mieć czwártą iego mnogość, trzeba wykładnika poczwórnić, i t. d. A w ogólności, aby wynieść wyráz a^m, do mnogości n, trzeba wykładnika m, rozmnożyć przez n, z którégo to rozmnożénia, wypadnie a^{mn}, toieſt mnogość n, wyrazu a^m. Co bezśrzednie wypádá z rozumowania uczynionégo względém zamiany rozmnożénia na dodáwanié.

236. Aby zaś wyciągnąć piérwiáſtek kwadratowy, ſześcienny, czwártéy mnogości, i t. d. z wyrazu iakiégo w ciągu Jeometrycznym; trzeba wykładnika tego wyrazu podzielić przez 2, 3, 4, i t. d, Okázać to na oko

możná

można tym ſpoſobém, którymeśmy zamianę dzieléńia wyrazów na odeymowanié ich wykładników wywiedli z zamiany rozmnożénia tychże wyrazów na dodáwanié ich wykładników.

237. Jeżeli wykładnik wyrazu iakiégo nié może bydź podzielonym przez wykładnika piérwiáſtku, który wyciągnąć chcemy; tedy wykładnik wypádaiący z takowégo dzieléńia nie będzie liczbą cálkowitą, a zatém nie będzie ſię téż znaydowáł w ciągu Jeometrycznym: ale liczba odpowiedaiącá takiému piérwiáſtkowi mieyſcé miéć będzie między dwóma wyrazami tego ciągu, których wykładniki różnią ſię od ſiebie iednością, i iedén z nich więkſzy będzie, a drugi mnieyſzy od wykładnika tego ułómkowégo.

I tak: niech będzie wyráz a^5, którégo oznaczyć trzeba piérwiáſtek kwadratowy. Wykładnik ilości a, w wyrażéniu tego piérwiáſtku będzie $\frac{5}{2}$, a zatém wyrażénié tego piérwiáſtku będzie $a^{\frac{5}{2}}$, toieſt piérwiáſtek kwadratowy piątéy mnogości, ilości a. Zachowuiąc tedy i tu iednokſztałtność wykładników, ieſt $\sqrt[2]{a^5}=a^{\frac{5}{2}}$. Podobnie $\sqrt[2]{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[2]{a^7}=a^{\frac{7}{2}}$; $\sqrt[3]{a^4}=a^{\frac{4}{3}}$; $\sqrt[3]{a^5}=a^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt[3]{a^7}=a^{\frac{7}{3}}$; i t. d.

238. Té różné wyrażénia wprowadzoné w ciąg Jeometryczny, który z początku miáł ſamé wykładniki cálkowité, zamiénią tén ciąg w inny ſzereg, w którym pomieſzané będą wyrazy maiącé wykładniki cálkowité z wyrazami maiącémi wykładniki ułómkowé: i tén drugi ſzereg, nie będzie ciągiém Jeometrycznym chyba w tym razie, gdy różnica dwóch którychkolwiek wyrazów naſtępnych, zawſze ieſt iednakowá.

I tak ſzereg tén $1, a^{\frac{1}{2}}, a^1, a^{\frac{3}{2}}, a^2, a^{\frac{5}{2}}, a^3, a^{\frac{7}{2}}, a^4, a^{\frac{9}{2}}. a^5, a^{\frac{11}{2}}, a^6$; i t. d. nie przeſtaie bydź ciągiém Jeometrycznym zupełnym, ponieważ między wſzyſtkié dwa naſtępné wyrazy piérwſzégo ciągu z wykładnikami cálkowitémi wprowadziliśmy iedén wyráz śrzedni Jeometryczny.

Tak téż i ſzereg naſtępuiący $1, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{2}{3}}, a, a^{\frac{4}{3}}, a^{\frac{5}{3}}, a^2, a^{\frac{7}{3}}, a^{\frac{8}{3}}, a^3, a^{\frac{10}{3}}, a^{\frac{11}{3}}, a^4$, i t. d. ieſt ciągiém Jeometrycznym zupełnym, iakimeśmy go uczynili przez wprowadzénié dwóch wyrazów śrzednich ieometrycznych pomiędzy dwa każdé wyrazy piérwſzégo ciągu z wykładnikami cálkowitémi.

To wprowadzénié wykładników ułómkowych, zawiſło od wyrazu, któryśmy wybrali za drugi do ciągu zaczynaiącégo ſię od 1. I tak w tym ciągu $1, a^{\frac{1}{2}}, a, a^{\frac{3}{2}}, a^2$, i t. d. ieżeli $a=2$, tedy on zamiéni ſię w naſtępuiący: $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$, i t. d. ieżeli zaś a, wáży iedno co $\sqrt{2}$, a zatém

a zatém $aa=2$; tedy wſzyſtkié w tym ciągu wykładniki ſą cáłkowité: co na oko ſię pokáże, ułożywſzy dwa naſtępuiącé ciągi:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, i t. d.
i 1, 4, 16, 64, 256, i t. d.

Jeżeli w drugim tym ciągu, uważáć będziémy liczbę 4, iak wyráz piérwſzy po 1, a zatém liczby 1, 4, 16, 64, 256, i t. d. iako maiącé wykładniki 0, 1, 2, 3, 4, i t. d. tedy pośrzednié wyrazy 2, 8, 32, 128, i t. d. będą miały za wykładników ilości ułómkowé $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, i t. d. Té zaś ſamé wyrazy mieć będą za wykładników ilości cáłkowité 1, 3, 5, 7, i t. d. gdy uważáć będziémy liczbę 2 za piérwſzy wyráz ciągu po 1.

239. Wſzyſtkié przerábiania dziáłáń czynionych w wyrazach z wykładnikami cáłkowitémi, na dziáłania daleko prościéyſzé, maiącé bydź czynioné z wykładnikami tychże wyrazów, té, mówię, przerábiania maią mieyſcé i w wyrazach z wykładnikami ułómkowémi.

Przykł: Niech będzie $a^{\frac{m}{n}}$ wyráz iakikolwiek ciągu, z wykładnikami ułómkowémi, kwadrát tego wyrazu będzie

$$a^{\frac{2m}{n}};\ \text{albo}\ \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^2=\sqrt[n]{a^{2m}}.$$

Jakoż niech będzie $\sqrt[n]{a^m}=z$.
Więc podnióſſzy do mnogości n, obiedwie ſtrony, będzie
$a^m=z^n$.
A zkwadrowawſzy obiedwie ſtrony, będzie
$a^{2m}=z^{2n}=z^n\times z^n$, toieſt zz, wzięté razy $n=(zz)^n$.
Więc wyciągnąwſzy piérwiáſt: $n$ty z obu ſtrón, będzie

$$\sqrt[n]{a^{2m}}=zz;\ \text{albo}\ a^{\frac{2m}{n}}=zz.$$

A że $\sqrt[n]{a^m}=z$, a zaś $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2=zz$.

Więc; $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2=a^{\frac{2m}{n}}$.

Toż ſamo rozumowanie przyſtóſować można i do innéy iakiéykolwiek ilości z wykładnikiém ułómkowym, którąby trzeba wyniéść do mnogości iakiéykolwiek całkowitéy. I tak: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{pm}{n}}$.

240. Aby zaś wyciągnąć piérwiáſtek iaki, *np.* kwadratowy, z wyrazu iakiégo, maiącégo wykładniká ułómkowégo; trzeba podzielić licznika w tym wykładniku przez 2, albo rozmnożyć mianownika iego przez 2. I tak $\sqrt{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{2n}}$. Jakoż ponieważ ilość $\frac{m}{n}$, ieſt podwóyná tego wyrazu $\frac{m}{2n}$ więc $a^{\frac{m}{n}}$, będzie kwadratém z $a^{\frac{m}{2n}}$, podług tego, co ſię wyżéy powiedziało: a wzaiémnie $a^{\frac{m}{2n}}$ będzie piérwiáſtkiém kwadratowym z $a^{\frac{m}{n}}$. Można to przyſtóſować i do innégo iakiégokolwiek piérwiáſtku, tak dalece, że $a^{\frac{m}{pn}}$, będzie piérwiáſtkiém *p*tym ilości $a^{\frac{m}{n}}$.

241. Stąd ſię w ſzczególności wnoſi, iż wielkość ilości maiącéy wykładnika ułómkowégo przez to ſię nie odmiéni, gdy tak licznika, iako i mianownika, tego wykładnika rozmnożymy przez ténże ſám wyráz. I tak *np.* podwoiwſzy licznika w wykładniku, oznaczymy przez to, że ilość cała podnieſioná ieſt do kwadratu, a podwoiwſzy znowu mianownika, oznaczymy, że bierzémy piérwiáſtek tegoż kwadratu. Więc po tém dwoiakiém działaniu ilość zoſtanie ta ſama, iaka była przed tém działaniém. A w ogólności:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$$

242. Idzie także zatém, że z wykładnikami ułómkowémi ilości iakich można czynić téż ſamé działania, któréśmy czynili w Arytmetyce z ułómkami zwyczaynémi: a w ſzczególności można przywiéśdź té wykładniki ułómkowé do iednakowégo mianownika.

I tak ilości $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{\frac{p}{q}}$, przywiedzioné do iednakowégo mianownika, wezmą tén kſztałt $a^{\frac{mq}{nq}}$, $a^{\frac{np}{nq}}$. Piérwſzá z tych ilości ieſt piérwiáſtkiém nq^{tym} ilości a^{mq}; drugá ieſt piérwiáſtkiém *nq*ty ilości a^{np}.

243. Stąd ieſzcze wynika, iż aby rozmnożyć iednę przez drugą dwie ilości, z wykładnikami ułómkowémi, których podſtawa czyli ilość maiącá té wykładniki ieſt iednakowá, trzeba dádź téy podſtawie za wykładnika ſummę tamtych wykładników. I tak $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$.

Jakoż $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mq}{nq}}$.

A zaś, $a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}}$.

Więc, $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}}$.

Niech będzie $\sqrt[nq]{a^{mq}} \times \sqrt[nq]{a^{np}} = z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$.

Więc podnióſſzy obie ſtrony do mnogości $nq^{\text{téy}}$ (co ſię ſtanie, gdy każdégo czynnika piérwſzéy ſtrony, podnieſiémy do téyże mnogości) będzie $a^{mq} \times a^{np} = z^{nq}$, albo, $a^{mq+np} = z^{nq}$.

A wyciągnąwſzy z obu ſtrón, piérwiáſtek mnogości nq, będzie $\sqrt[nq]{(a^{mq+np})} = z$, albo, $a^{\frac{mq+np}{nq}} = z$.

Że zaś $z = a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}}$; więc $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$.

Ténże ſám ſpoſób poſtępowania, i toż rozumowanié przyſtóſować można z równą łatwością i do wykładników ułómkowych uiémnych.

244. Stoſunek, który zachodzi między piérwſzym wyrażém ciągu Jeometrycznégo, i którymkolwiek wyrazém tegoż ciągu uważać można iak złożony z ſtoſunków piérwſzégo wyrazu do drugiégo, drugiégo do trzeciégo, trzeciégo do czwártégo, i t. d. aż do ſtoſunku wyrazu przed tym, o który idzie, znayduiącégo ſię, do tegoż ſamégo wyrazu. A że w ciągu Jeometrycznym wſzyſtkié té ſtoſunki powinny bydź równé, a liczba tych ſtoſunków oznaczoná ieſt przez wykładnika oſtatniégo wyrazu; więc wykładnika

wyrazu każdégo w ciągu Jeometrycznym, uważać można iako oznáczaiącégo liczbę ſtoſunków równych, z których ſię ſkłádá ſtoſunek piérwſzégo wyrazu ciągu Jeometrycznégo, do tego oſtatniégo wyrazu.

Pod tymto oſtatnim względém uważać ſię zwykły w wyżſzéy matematyce wykładniki wyrazów w ciągu Jeometrycznym; i wtedy té wyrazy nazywaią ſię Logarytmami: gdyż ſą nieiaką miarą ſtoſunków, toieſt, oznáczaią liczbę ſtoſunków, z których ſię ſkłádá tén w ſzczególności ſtoſunek, około którégo czynimy działania, tak prawie, iak łuki kół, ſłużą za miarę kątów. Uważaiąc poprzednika wſzyſtkich ſtoſunków, z którémi przypádá nám mieć do czynienia, iakoby ténże ſám był wſzędzie, ſkrócono wyrażénié w tén ſpoſób, i nazwano miarą ſtoſunków, Logarytmy naſtępników tychże ſtoſunków, opuściwſzy ich piérwſzé znaczénié, (§. 301. Części I. Jeom:)

245. Którymkolwiek z tych dwóch ſpoſobów uważać będziémy Logarytmy; zawſze wnieść można, że ténże ſám ſtoſunek, albo też ſama liczba má różné Logarytmy, podług różnégo ſtoſunku, który wzięliśmy za podſtawę, czyli podług różnéy liczby, którą wzięliśmy za drugi wyráz ciągu. I tak uważaiąc ſtoſunek 1, do 2, iak ſtoſunek iednoſtayny dwóch wyrazów ciągu; ſtoſunek 1 do 64, ſkłádać ſię będzie z 6 ſtoſunków równych ſtoſunkowi 1 do 2: a zatém Logarytm ſtoſunku 1 do 64, czyli Logarytm liczby 64, będzie 6. Gdyby zaś ſtoſunek iednoſtayny był 1, do 4; tedy ſtoſunek 1, do 64, ſkłádáłby ſię tylko ze trzech takowych ſtoſunków: a zatém w takowém braniu ſtoſunku iednoſtaynégo, Logarytm ſtoſunku 1, do 64, czyli liczby 64, byłby 3.

W piérwſzym razie, Logarytm liczby *np.* 64, ieſt podwóynym Logarytmu téyże liczby w drugim razie. Tożby było i względém iakiéykolwiek innéy liczby: zawſze iéy Logarytm w piérwſzém wzięciu, byłby podwóynym Logarytmu, w drugiém wzięciu.

Jakoż niech w piérwſzém wzięciu będzie $2^m = a$.
A niech w drugiém wzięciu będzie . . . $4^n = a$.
Póydzie zatém, że $m = 2n$; toieſt, że m, ieſt ilość podwóyná ilości n. Bo ponieważ tak 2^m, iak i 4^n, równá ſię téyże ſaméy ilości a; więc $2^m = 4^n$. A że $4^n = 2^n \times 2^n = 2^{2n}$; więc $2^m = 2^{2n}$: a zatém $m = 2n$.

Gdyby drugi wyráz drugiégo ciągu był 8, a zatém ſtoſunek iednoſtayny tego drugiégo ciągu, albo ſtoſunek piérwiáſtkowy, był 1 do 8; tedy wykła-

kładnik każdégo wyrazu w piérwszym ciągu, byłby potróynym wykładnika odpowiédaiącégo sobie, w drugim tym ciągu: a zatém ułożywszy tablicę Logarytmów podług piérwszégo ciągu, i wziąwszy potém połowy, albo trzecié części tych Logarytmów; té połowy, albo trzecié części będą Logarytmami wyrazów piérwszym odpowiedaiących w drugim ciągu, gdzie za drugi wyráz wzięliśmy 4, albo 8. A wzaiémie ułożywszy Táblicę Logarytmów podług iednégo z tych dwóch ostatnich ciągów; té samé Logarytmy podwóyné lub potróyné, będą Logarytmami wyrazów odpowiedaiących w piérwszym ciągu.

246. *Układ* (systema) Logarytmów zawisł od stosunku piérwiástkowégo, z którégo uważámy iakoby złożoné inné stosunki: czyli zawisł od wyrazu wziętégo za drugi w ciągu Jeometrycznym. Tén wyráz nazywá się *podstawą* układu Jeometrycznégo: który to wyráz má 1 za Logárytm. Wykładnik zaś mnogości, do któréy wyniéść trzeba tę podstawę, aby otrzymać liczbę daną, iest Logarytmém téy liczby.

247. W Táblicach zwyczaynych wzięto liczbę 10, za drugi wyráz ciągu, toiest, za podstawę, któréy Logarytmém iest 1. W takiém wzięciu, Logarytmy liczb 100, 1000, 10000, i t. d. któré to Logarytmy są podwóynémi, potróynemi poczwórnémi, i t. d. względém Logarytmu liczby 10, będą 2, 3, 4, i t. d. Logarytmy liczb pośrzednich, między 1, i 10, są przydayné, ale mnieysze od 1, a zatém są właściwémi ułómkami. I tak Logarytmy liczb 2, 3, 4, 5, i t. d. są 0, 3010300, 0, 4771213, 0, 6020600; 0, 6989700. i t. d.

Logarytmy liczb pośrzednich, między 10, i 100, są pośrzedniémi, między 1, i 2, i znak ich całkowity, czyli cécha iest 1, po któréy idą znaki dziesiątné, któré tu nazywámy *przydatkowémi*, (wŁacińskich Xiążkach nazywaią ié *mantissa*). *Obácz w Trygonométryi, o Logarytmach, na karcié 313, §. 301 i następ:)*

Gdybyśmy chcieli uważać Logarytmy iak liczby zupełnie cálkowité; tedyby uważać trzeba stosunek 1, do 10, iako skłádaiący się z 10000000 stosunków równych między sobą, a w takim razie stosunek 1 do 2, skłádálby się z 3010300 takichże stosunków; stosunek 1 do 3, skłádálby się z 4771213 takich także stosunków; stosunek 1 do 4, skłádálby z 6020600 równych piérwszym stosunków i t. d. Albo też trzebaby uważać liczbę 10, iako 10000000wą mnogość pewnéy iakiéy liczby; a w takowém uważaniu liczby 2, 3, 4, 5,

 i t. d.

i t. d. byłyby 30103003, 47712133, 60206003, 69897003 i t. d. mnogością téyże liczby.

Aby przywieśdź układ Tábliczny Logarytmów do układu, w którymby liczba 2, była podstawą; trzebaby podzielić wszystkié Logarytmy Táblicowé przez Logarytm táblicowy liczby 2, toiest przez 0, 3010300, albo ié rozmnożyć przez 3, 321928. A w ogólności, aby przywieśdź Logarytmy tábliczné do układu Logarytmów, maiącégo za podstawę liczbę iakąkolwiek; trzeba ié podzielić przez Logarytm tabliczny téyże liczby.

Podzieliwszy Logarytmy tábliczné przez liczbę 2, 302585, będziémy mieli Logarytmy nazwané Hyperbolicznémi, których wielkié iest używanié w wyższéy Matematyce, a których podstawą iest 2, 71828183.

Co się tycze przystósowania rachunku przez Logarytmy do mnożénia, dzielénia, reguły trzech, wyciągania piérwiástków kwadr: i t. d. *Obácz Część I. Jeom: §. 304 i nast:*

248. *Zadanié I. Pewná osoba maiąca 10000 Cz: Zł: bierze z nich 5% procéntu, nie prostégo, ale skłádánégo: toiest procént wzięty każdégo roku łącząc z kapitałém i wrász z nim daiąc go znowu na podobny procént 5% na rok każdy następuiący: Iléż ta osoba ze wszystkiém będzie miała za lát 10?*

Możnáby tén rachunek odprawić dodaiąc do kapitáłu procént, na końcu 1go roku, i szukaiąc procéntu od téy summy na końcu 2go roku, a tén znowu procént 2go roku dodáwszy do summy na końcu 1go roku zebranéy, szukaiąc procéntu, który od téy nowéy summy przypadnie, na końcu 3go roku, i t. d. Ale taki rachunek byłby bardzo długi, gdyby liczba lát miała bydź znaczná: možná zaś prędko go zakończyć używszy Logarytmów.

Na końcu 1go roku kapitáł powiększy się $\frac{1}{20}$ częścią siebie samégo; toiest stanie się $\frac{21}{20}$ siebie samégo.

Na końcu 2go roku, tén kapitáł będzie $\frac{21}{20}$ częścią tego, czém był na początku 2go roku, toiest będzie $\frac{21}{20}$ z $\frac{21}{20}$; albo $(\frac{21}{20})^2$ tego czém był z samégo początku.

Podobnym sposobém tén kapitáł na końcu 3go roku będzie $\frac{21}{20}$ z $(\frac{21}{20})^2$ siebie samégo, albo $(\frac{21}{20})^3$ siebie samégo.

Ténże kapitáł na końcu 4go, 5go . . . 10go roku będzie $(\frac{21}{20})^4$ . . . . $(\frac{21}{20})^5$ . . . . $(\frac{21}{20})^{10}$ piérwszéy swoiéy wáżności.

Więc na końcu 10 lát, tén kapitáł będzie $10000 \times (\frac{21}{20})^{10}$.

Log.

Log. . . . . $\frac{21}{20}$ = 0, 0211893.
Log. . . . $(\frac{21}{20})^{10}$ = 0, 2118930.
Log. . . . 10000 = 4, 0000000.
Log. $10000 \times (\frac{21}{20})^{10}$ = 4, 2118930. = Log. 16289.

Więc za 10 lát ta osoba mieć będzie 16289 Cz: Zł.

Gdyby tén kapitáł dany był na procént prosty, tak dalece, aby procénta każdégo roku, nie przynosiły nowych procéntów na lata następuiącé; tedy, ponieważ procént roczny iest 500 Cz: Zł: więc procént za 10 lát, byłby 5000 Cz: Zł: a zatém summa za 10 lát urosłaby tylko do 15000 Cz: Zł: toiest, mniéy 1289 Cz: Zł.

Inszé przykłady. Pewnä osoba maiącá 12000 Cz: Zł. bierze z nich 6$\frac{0}{0}$ procéntu skłádanégo. Iléż zbierze wráz z kapitałém za lát 15 I iléby znowu miała za téż lát 15, gdyby zamiást tego, co bierze procént roczny po 6$\frac{0}{0}$, brała go co 6 miesięcy po 3$\frac{0}{0}$.

Pewny kupiec powiększá co rok swóy maiątek $\frac{1}{4}$ częścią; iléż będzie miáł ze wszystkiém za lát 10?

249. *Zadanié 2. Pewná okolica, która w sobie zamykała tylko 10000 dusz w lát 12; powiększyła się do 15000 dusz; iakiéż było powiększanié się tychże dusz?*

Niech będzie stosunek ludności na początku iednégo roku, do iéy powiększania się przez tén rok, iak 10000 do x. W taki sposób na końcu każdégo roku, ludność będzie $\frac{10000+x}{10000}$ téy ludności, która była na początku tego roku a na końcu 12 lát będzie ta ludność $\left(\frac{10000+x}{10000}\right)^{12}$ téy ludności, która była przed témi 12 laty. Wypadnie zatém następuiącé równanié,

$$\left(\frac{10000+x}{10000}\right)^{12} \times 10000 = 15000.$$

Wziąwszy Logarytmy obu strón.

$$12 \text{ Log. } \frac{10000+x}{10000} + \text{Log. } 10000 = \text{Log: } 15000.$$

Więc

Więc Log: $\frac{10000+x}{10000}$ = Log. $\frac{15000 - \text{Log: } 10000}{12}$.

A że Log: $\frac{10000+x}{10000}$ = Log: (10000+x) — Log: 10000.

Więc Log: (10000+x) — Log: 10000 = $\frac{\text{Log. } 15000 - \text{Log: } 10000.}{12}$

A Log: (10000+x) = $\frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12}$ + Log: 10000

Że zaś Log: 15000 — Log: 10000 = 0, 1760913.

A zatém $\frac{\text{Log: } 15000 - \text{Log: } 10000}{12}$ = 0, 0146743.

a dodawſzy 4, toieſt
Log: 10000, będzie . . . . . 4, 0146743.
Więc. Log: (10000+x) = 4, 0146743 = Log: 10344.
a zatém, 10000 + x = 10344.
x = 344.
Więc powiękſzénié roczné ludności, ieſt między 3, i 4 od ſta.

Inſzé przykłady. Pewny kráy, którégo ludność nie ieſt w mierze obſzérności iego, zawiérá w ſobie duſz 8000000, iakiżby powinién bydź ſtoſunek téy ludności do rocznégo iéy powiękſzénia ſię, aby po ſkończonym wieku iednym kráy tén zawiérál w ſobie 12000000.

Pewná oſoba chciałaby w lát 18 podwoić ſwóy maiątek 10000 Cz: Zł: daiąc go na procént ſkłádany. Jakiż má bydź tén procént?

250. *Zadanié 3. Winiéném komu 10000 Cz: Zł: które obowiązałém ſię za lát 6 wypłacić. Ilėżby mi terāz zarāz wypłacić należało dlá pozbycia ſię tego długu, rachuiąc procént po 6%?*

Gdy dziś winién ieſtém ſummę iaką rachuiąc procént po 6%, iedno to ieſt, iak gdybym był winién $(\frac{106}{100})^6$ téy ſummy, które $(\frac{106}{100})^6$ miálbym wypłacić dopiéro za 6 lát bez procéntu; albo, co na iedno wychodzi, gdy dziś winién ieſtém *np.* 100^6 Cz: Zł. iedno to ieſt, iak gdybym był winién 106^6 Cz: Zł: za lát 6. I wzaiémnie ieżeli winién ieſtem 106^6 Cz: Zł: które mám za 6 lát wy-

wypłacić, iedno to ieſt, iak gdybym dziś zaráz obowiązanym był wypłacić 100^6 Cz: Zł: azatém ſumma ſzukaná, ieſt czwártym wyrazém proporcyi, którćy trzema piérwſzémi wyrazami ſą liczby 106^6, 100^6, i 10000. Wyrażénié zaś téy ſummy będzie naſtępuiącé: $10000 \times (\frac{100}{106})^6$.

Log: $\frac{100}{106} = -1, + 9746941$.

6 Log: $(\frac{100}{106})$, albo Log: $(\frac{100}{106})^6 = -1, + 8481646$.

Log: $10000 = \quad 4$.

Summa . . . . 3, 8481646 = Log: 7050 Cz: Zł: blizko. Ważność długu którćy ſzukałém.

Dlá ſpráwdzénia tego, ſzukáymy ważności po 6 latach ſkończonych ſummy 7050 Cz: Zł: któréby teráz zaráz wypłacić należało. Ważność ta będzie $7050 \times (\frac{106}{100})^6$: uczyniwſzy zaś rachunek iak wyżéy, znaydziémy tę ważność, ledwie pół Cz: Zł: różniącą ſię od 10000 Cz: Zł:

Inſzé przykłady. Jakáż ieſt teraźniéyſzá ważność Cz: Zł: 12000, które dopiéro za lát 10 maią bydź wypłaconé, rachuiąc procént po $5\frac{0}{0}$.

I znowu. Jakáż ieſt ważność teráźnieyſzá 18000 Cz: Zł: które dopiéro za lát 20 maią bydź wypłaconé rachuiąc procént po $5\frac{0}{0}$?

251. *Zadanié 4. Pewná oſoba má 10000 Cz: Zł: z których bierze procént ſkłádany po $5\frac{0}{0}$. Za iléż lát maiątek téy oſoby będzie podwoionym?*

Niech liczba lát ſzukaná będzie x: ważność kapitálu 10000 Cz: Zł: na końcu lát x, będzie $10000 \times (\frac{21}{20})^x$.

Warunek. $10000 \times (\frac{21}{20})^x = 20000$.

Przerábianié. (Podzieliw: obie ſtrony przez 10000) $(\frac{21}{20})^x = 2$.

(Wziąwſzy Log: obu ſtrón) x Log: $\frac{21}{20}$ = Log: 2.

albo $x \times 0, 0211893 = 0, 3010300$.

Więc $x = \frac{3010300}{211893} = 14$ lát, i prawie 2 mieſiącóm.

Więc na końcu 14 lát, kapitáł uróſł do $10000 \times (\frac{21}{20})^{14}$ Czerw: Zł: = 19800 Cz: Zł: blizko. Na końcu 15 lát uróſł blizko do 20790 Cz: Zł: A zatém kapitáł tén podwoiony był na końcu trochę więcéy niż cztérnáſtu lát.

Inſzé przykłady. Za iléż lát pewná ſumma daná na procént ſkłádany $6\frac{0}{0}$ powiękſzoná będzie $\frac{1}{3}$ częścią iéy ſaméy?

Za iléż lát pewná ſumma daná na procént ſkłádany $6\frac{0}{0}$ będzie potroioná?

252. *Zadanié 5. Pewná oſoba dała 12000 Zł: na procént ſkłádany $5\frac{0}{0}$, a 10000 Zł: na procént ſkłádany $6\frac{0}{0}$. Za iléż lát dwa té kapitáły, wzięté wráz z procéntami ſwémi zrownaią ſię z ſobą?*

Ważność 1go kapitału na końcu téy liczby lát będzie $12000 \times (\frac{105}{100})^x$
. . . . . 2go . . . . $10000 \times (\frac{106}{100})^x$

Warunek. $12000 \times (\frac{105}{100})^x = 10000 \times (\frac{106}{100})^x$.

Przeráb: Podziel: obie strony przez 2000) $6 \times (\frac{105}{100})^x = 5 \times (\frac{106}{100})^x$.
(Rozmn: obie strony przez 100^x) $6 \times 105^x = 5 \times 106^x$.
(Wziąwszy Logarytm obu strón)
Log: 6+x Log: 105 = Log: 5+x Log: 106.
(Odiąwszy Logarytm 5 po obu stronach)
Log: 6 — Log: 5+x Log: 105 = x Log: 106.
(Odiąwszy x Logarytm 105 po obu stronach)
Log: 6 — Log: 5 = x Log: 106 — x Log: 105.
(Podzieliwszy obie strony przez Log: 106 — Log: 105)

$$\frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = x.$$

Rozw: $x = \frac{\text{Log: } 6 - \text{Log: } 5}{\text{Log: } 106 - \text{Log: } 105} = \frac{0,\ 0791813}{0,\ 0041166} = \frac{791813}{41163} =$
19 lát i trochę mniéy, niż 3 miesiące.

Na końcu 19 lát 1 wszy kapitał będzie $12000 \times (\frac{105}{100})^{19} = 30324$ blizko.
. . . . . 2gi . . . . . $10000 \times (\frac{106}{100})^{19} = 30255$ blizko.

Dodáwszy do każdéy z tych dwóch summ, czwártą część ich procéntów roku całégo, będzie 1wszá summa 30703: a drugá 30708: które to summy różnią się tylko od siebie 5 Cz: Zł: ta zaś różnica względém summy catéy większéy niż 30000, nie iest nawet $\frac{1}{6000}$ częścią onéyże.

Insze przykłady. Pewná osoba daie 15000 Zł: na procént skłádany 7$\frac{0}{0}$, a 20000 Zł: na procént także skłádany 5$\frac{0}{0}$. Za iléż lát té dwa kapitály wzięté wráz z procéntami swémi, zrównaią się?

Niech znowu będą dwie summy 24000, i 18000 Zł: procént od 1wszéy 6$\frac{0}{0}$, od 2giéy 8$\frac{0}{0}$. Za iléż lát 1wszy kapitał przewyższać będzie tylko $\frac{1}{5}$ częścią drugi kapitał?

253. *Zadanie 6. Pewná osoba daie 5600 Zł. na skłádany procént 6$\frac{0}{0}$; ale tak, że procént tén, má iéy przypádać co 6 miesięcy po 3$\frac{0}{0}$, i znowu daie 6000 Zł: na takiż procént po 6$\frac{0}{0}$; tén zaś drugi procént má iéy rocznie przypádać. Za iléż lát té dwa kapitály, wzięté wráz z procéntami swémi zrównaią się?*

Niech

Niech będzie liczba ſzukaná lát . . . . . x.
Ważność 1go kapitáłu na końcu lát x, będzie . . $5600 \times (\frac{103}{100})^{2x}$.
. . . 2go . . . . $6000 \times (\frac{106}{100})^{x}$.

Warunek. $5600 \times (\frac{103}{100})^{2x} = 6000 \times (\frac{106}{100})^{x}$.

Przerób: (Podziel: obie ſtrony przez 400) $14 \times (\frac{103}{100})^{2x} = 15 (\frac{106}{100})^{x}$.
(Wziąwſzy Logarytm obu ſtrón)
Log: $14 + 2x$ Log: $\frac{103}{100}$ = Log: $15 + x$ Log: $\frac{106}{100}$.
(Odiąwſzy po obu ſtronach Log: 14 i x Log: $\frac{106}{100}$)
$2x$ Log: $\frac{103}{100}$ — x Log: $\frac{106}{100}$ = Log: 15 — Log: 14.
albo x(2 Log: $\frac{103}{100}$ — Log: $\frac{106}{100}$) = Log: 15 — Log: 14.
(Wziąwſzy w ſaméy rzeczy té Logarytmy)
$x(2 \times 0,0128372 - 0,0253059) = 0,0299633$.
albo $x(0,0003665) = 0,0299633$.

Rozwiązanié. $x = \frac{299633}{3665}$ = trochę mniéy niż 82 lát.

Inſzy przykłád prawié podobny piérwſzému.

Pewná oſoba dała 10000 Zł. na procént ſkłádany $8\frac{0}{0}$, rachuiąc procénta co 6 mieſięcy; za iléż lát cały maiątek téy oſoby będzie większy $\frac{1}{20}$ częścią, niż gdyby ta oſoba też ſamę ſummę dała była, na ténże ſám procént $8\frac{0}{0}$, wymáwiaiąc go ſobie dopiéro po każdym roku ſkończonym.

254. Można znaléźć ſummę ciągu Jeometrycznégo bez dodáwania naſtępnégo wyrazów tego ciągu.

I tak niech będzie ciąg Jeometryczny podwóyny.
$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7 \ldots 2^{n-1}$.
Podwoiwſzy każdy
wyráz będzie . . . $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7 \ldots 2^n$.

Ponieważ wſzyſtkie wyrazy drugiégo ciągu, ſą podwóynémi wyrazów piérwſzégo ciągu; więc różnicą tych dwóch ciągów będzie ſámże ciąg 1wſzy. A że też różnica tych dwóch ciągów ieſt $2^n - 1$, bo wſzyſtkié wyrazy drugiégo ciągu opróćz 2^n, ſą i w piérwſzym ciągu, a w drugim ciągu nié maſz znowu wyrazu 1, który ieſt w piérwſzym ciągu; więc aby znaléźć ſummę liczby n, wyrazów ciągu Jeometrycznégo, podwóynégo, zaczynaiącégo ſię od 1; *trzeba odiąć tę iedność od oſtatniégo wyrazu podwoionégo, czyli od wyrazu, któryby naſtępowáł po oſtatnim.*

Niech będzie $ſ = 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+ \dots 2^{n-1}$.
Podwoiwſzy każdy wyráz, będzie $2ſ = 2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7+ \dots 2^n$.
Od ſtrón 2go ró-wnania, odiąwſzy ſtrony 1go ró-wnania, będzie $1ſ = -1 \dots\dots\dots\dots + 2^n$.
albo .... $ſ = 2^n - 1$.

Przykł: Koń má 8 gwożdzi, u każdéy podkowy, a zatém u 4 podków má 32 gwożdzi. Iléżby przypadło dadź za tégo konia, gdyby kto chciał go przedadź pod tym warunkiém, aby mu za 1wſzy gwóźdź dano groſz 1, za 2gi groſzy 2, za 3ci gr: 4, za 4ty gr. 8 i t. d. dwoiąc zawſze cenę każdégo gwożdzia naſtępnégo.

Cena tego konia ieſt $2^{32}-1$, gr. podług tego, co się dopiéro powiédziało.

$2^2 = 4.$
$2^4 = 16.$
$2^8 = 256.$
$2^{16} = 65536.$
$2^{32} = 4294967296.$
$2^{32}-1 = 4294967295$ groſzy.

Podzieliwſzy tę oſtatnią liczbę przez 540, toieſt przez ważność czerwonégo złotégo w groſzach, byłaby cena konia 7953643 Czſ: Zł: i gr: 75, albo Zł: 2, gr: 15.

255. Niech znowu będzie $ſ = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+ \dots 3^{n-1}$.
Potroiwſzy każdy wyráz będzie .... $3ſ = 3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+ \dots 3^n$.
Od ſtrón 2go równania, odiąwſzy ſtrony 1go równania będzie $2ſ = -1 \dots\dots\dots + 3^n = 3^n - 1$.
Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2; będzie .... $ſ = \dfrac{3^n - 1}{2}$ { Trzeba więc od wyrazu tego, któryby naſtępował po oſtatnim, odiąć 1, i téy reſzty wziąźć połowę.

256. Niech będzie $ſ = 1+4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+\ldots\ldots 4^{n-1}$.
Poczwórzywſzy każdy wyráz będzie . . $4ſ = 4+4^2+4^3+4^4+4^5+4^6+4^7+\ldots\ldots 4^n$.
Odiąwſzy tak iak wyżéy będzie . . . $3ſ = -1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; +4^n = 4^n - 1$.
Podzieliwſzy obie ſtrony przez 3 będzie $ſ = \dfrac{4^n - 1}{3}$. *Trzeba więc od wyrazu tego, któryby naſtępowáł po oſtatnim, odiąć 1, i reſzty wziąść 3cią część.*

Ogólnie. Niech będzie $ſ = 1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7+\ldots . p^{n-1}$.
Rozmn: każdy wyráz przez p, będzie . . $pſ = p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6+p^7+\ldots . p^n$.
Odiąwſzy tak iak wyżéy, będzie . . . $pſ - ſ = -1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; +p^n = p^n - 1$.
albo $ſ(p-1) = p^n - 1$.
Podzieliwſzy obie ſtrony przez $p-1$ . . . $ſ = \dfrac{p^n - 1}{p - 1}$.

Toieſt: *trzeba od wyrazu, któryby naſtępowáł po oſtatnim odiąć 1, i reſztę podzielić przez różnicę piérwſzych dwóch wyrazów.*

257. Jeżeli ciąg Jeometryczny nie zaczyná ſię od iednégo; tedy wſzelako można go przywiéśdź do takiégo ciągu, któryby za 1wſzy wyráz miáł 1.

I tak niech będzie ciąg Jeometryczny, którégo piérwſzym wyrazém ieſt a, drugim b; wykładnik tego ciągu ieſt $\frac{b}{a}$, a zatém ciąg tén można w taki kſztáłt wyrazić:

$$a,\, a\times\frac{b}{a},\, a\times\frac{b^2}{a^2},\, a\times\frac{b^3}{a^3},\, a\times\frac{b^4}{a^4},\, a\times\frac{b^5}{a^5},\, a\times\frac{b^6}{a^6} + \;.\;.\;.\; a\times\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Więc ſumma tego ciągu ieſt:

$$a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}+\frac{b^6}{a^6}+\frac{b^7}{a^7}+\ldots\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right).$$

$$= a\left[\frac{\frac{b^n}{a^n} - 1}{\frac{b}{a} - 1}\right] = a\left(\frac{b^n - a^n}{a^n} : \frac{b-a}{a}\right) = a\left(\frac{b^n - a^n}{a^n} \times \frac{a}{b-a}\right) =$$

$a \times \frac{(b^n - a^n)}{a^{n-1}(b-a)} = \frac{b^n - a^n}{a^{n-2}(b-a)}$. Uczyniwszy $\frac{b}{a} = p$; będzie ta summa $= a \times \frac{p^n - 1}{p - 1}$.

258. W wyrażéniu tém $\frac{p^n - 1}{p - 1}$, summy ciągu Jeometrycznégo, który má 1 za piérwszy wyráz, a którégo wykładnikiém iest p; ieżeli p, iest mnieysze od 1; tém bardziéy p^n mnieysze będzie od 1: a zatém tak licznik, iak i mianownik tego ułómku $\frac{p^n - 1}{p - 1}$ będą w takim razie uiémnémi. Rozmnożywszy zaś każdégo z nich przez ilość -1, obadwa staną się przydaynémi, i wyrażénié powyższé summy zamiéni się w to $\frac{1-p^n}{1-p} = \frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$ Co też możnáby i bezśrzednie okázać w sposób następuiący:

259. Niech będzie ciągu Jeometrycznégo summa . $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}}$.

Wziąwszy połowę, będzie . . . . $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \ldots \frac{1}{2^n}$

Odiąwszy strony 2go równania od strón 1go będzie $\frac{1}{2}S = 1$ . . . . $- \frac{1}{2^n}$

Podwóiwszy obie strony . . . . . . $S = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$. To ostatnie wyrażénie zgádzá się z wyrażéniém ogólném $\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p}$. Bo tu iest $p = \frac{1}{2}$. a zatém:

$$\frac{1}{1-p} - \frac{p^n}{1-p} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2 - 2 \times \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

W tym

W tym razie, *ieżeli od 2, odeymiémy ostatni wyráz ciągu, reszta będzie summą całégo ciągu.* Czego nawet dowieśdź można i przez rozumowanie.

Summie dwóch piérwszych wyrazów, brakuie $\frac{1}{2}$ do tego, aby czyniła 2: a zatém trzebaby, aby trzeci wyráz był $\frac{1}{2}$, toby dopiéro summa trzech wyrazów piérwszych była 2. A że tén trzeci wyráz iest tylko $\frac{1}{4}$, toiest połowa drugiégo wyrazu $\frac{1}{2}$; więc summie trzech wyrazów piérwszych, brakować będzie $\frac{1}{4}$ do tego, aby ta summa czyniła 2, toiest brakować iéy do tego będzie samégo trzeciégo wyrazu. Tak téż summie cztérech piérwszych wyrazów, brakować będzie połowy z $\frac{1}{4}$, albo $\frac{1}{8}$, toiest brakować iéy będzie czwártégo wyrazu do tego, aby ta summa czyniła 2, i t. d.

A zatém summa ciągu maleiącégo 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, i t. d. tém bardziéy zbliżá się do 2; im większá iest liczba wyrazów tego ciągu, i możé do téy wáżności 2, przybliżyć się bardziéy, niż iakákolwiek różnica naznaczoná, nigdy iednak téy wáżności 2, nie przeniesie. I przeto gdy ciąg powyższy uwáżá się iakoby przedłużony był, nad wszelką liczbę wyrazów naznaczoną; tedy liczba 2, w takim razie nazywa się summą tego ciągu.

260. Niech znowu będzie ciąg Jeometryczny maleiący:

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243},\ \frac{1}{729}\ \ldots\ \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Niech będzie $s = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\ \ldots\ \frac{1}{3^{n-1}}.$

Wziąwszy 3cią

część będzie . . . $\frac{1}{3}s = \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\frac{1}{729}+\ \ldots\ \frac{1}{3^n}.$

Odiąwszy 2gié równanié od 1wszégo będzie $\frac{2}{3}s = 1\ \ldots\ldots\ldots - \frac{1}{3^n}.$

Potroiwszy obie strony . . . . $2s = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}.$

Podzie-

Podzieliwszy

przez 2; . . . $ʃ = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}$.

Toieſt: *od* $1\frac{1}{2}$, *trzeba odiąć połowę oſtatniégo wyrazu; a reſzta będzie ſummą ciągu maiącégo liczbę* n *wyrazów, a zatém wyráz ułómkowy* $1\frac{1}{2}$, *ieſt granicą ſummy tego ciągu.* Co też okázać można, i przez rozumowanié podobné tému, którégośmy użyli w ciągu poprzedzaiącym.

261. Niech ieſzcze

będzie . . . . . . $ʃ = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \ldots \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Wziąwſzy $\frac{2}{3}$ obu

ſtrón . . . . . $\frac{2}{3}ʃ = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243} + \frac{64}{729} + \ldots \frac{2^n}{3^n}$.

Odiąwſzy 2gié

równanié od 1wſzégo $\frac{1}{3}ʃ = 1$ . . . . $- \frac{2^n}{3^n}$.

Rozmnożywſzy

obie ſtrony przez 3 . . $ʃ = 3 - \frac{2^n}{3^{n-1}} = 3 - 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Toieſt: *od* 3, *trzeba odiąć podwóyny wyráz* nty, *a tak znalezioná będzie ſumma liczby* n *wyrazów tego ciągu: a zatém liczba* 3 *ieſt tu granicą ciągu, którá to liczba* 3, *ieſt ſummą ciągu całégo, gdy tén ciąg uważymy, iakoby przedłużony aż do liczby wyrazów, przewyżſzaiącéy wſzelką liczbę naznaczoną.*

Ogólnie. Niech będzie ciąg maleiący:

$$1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{p^3}, \frac{1}{p^4}, \frac{1}{p^5}, \frac{1}{p^6}, \ldots \frac{1}{p^{n-1}}.$$

Niech będzie $ʃ = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} \ldots \frac{1}{p^{n-1}}$.

Rozmn: obie ſtrony

przez $\frac{1}{p}$, będzie $\frac{1}{p} ʃ = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5} + \frac{1}{p^6} + \frac{1}{p^7} \ldots \frac{1}{p^n}$.

Odiąwſzy

Odiąwſzy 2gié ró-

wnanié od 1wſzégo . . $ſ\left(1-\frac{1}{p}\right)=1. \quad . \quad . \quad . \quad -\frac{1}{p^n}.$

albo; $ſ\times\frac{p-1}{p}=1-\frac{1}{p^n}.$

Podzieliwſzy obie ſtrony przez $\frac{p-1}{p}$, czyli rozmnożywſzy przez

$$\frac{p}{p-1};\ ſ=\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{p^{n-1}}.$$

Toieſt: *trzeba podzielić wykładnika ciągu przez tegoż wykładnika zmnieyſzonégo iednością, a od wielorazu tego odiąć oſtatni wyráz ciągu podzielony przez wykładnika zmnieyſzonégo iednością: reſzta będzie ſummą liczby* n, *wyrazów ciągu.* A zatém wyráz $\frac{p}{p-1}$, ieſt granicą ciągu, który to wyráz nazywá ſię wtedy ſummą ciągu, gdy liczba wyrazów przewyżſzá wſzelką liczbę naznaczoną.

262. Jeżeli licznik drugiégo wyrazu nie ieſt 1, tak dalece, że $\frac{1}{p}$ $=\frac{m}{n}$, albo $p=\frac{n}{m}$; wtedy $ſ=\frac{n}{m}:\frac{n}{m}-1=\frac{n}{m}:\frac{n-m}{m}=\frac{n}{n-m}.$

263. Nakoniec, ieżeli piérwſzym wyrazém ciągu nie ieſt 1, ale naprzykład a, i ieżeli drugi wyráz *np.* b, ieſt mnieyſzy od pierwſzégo; tedy i w takim razie można oznaczyć ciąg Jeometryczny maleiący, na wzór ciągów roſnących, w ſpoſób naſtępuiący:

$$a,\ a\times\frac{b}{a},\ a\times\frac{b^2}{a^2},\ a\times\frac{b^3}{a^3},\ a\times\frac{b^4}{a^4},\ a\times\frac{b^5}{a^5}\ .\ .\ a\times\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

albo; $a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}\ .\ .\ .\ .\ \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}.\right.$

Granicą tego ciągu ieſt $a\left(\frac{a}{a-b}\right)$, albo $\frac{aa}{a-b}$.

264. *Zagadniénié* 1. *Maiąc dany drugi wyráz ciągu Jeometrycznégo maleiącégo, i iego granicę* (którą daléy nazywać będziémy ſummą) *znaléźć tén ciąg.*

Niech będzie $ſ$, ſumma daná, niech będzie b, wyráz drugi ciągu także dany.

Mianowanié. Piérwſzy wyráz ſzukany . . . x.

Summa ciągu będzie . . . . $\frac{xx}{x-b}$.

Warunek. $\frac{xx}{x-b} = ſ$.

Przeráb: (Rozmnożywſzy obie ſtrony przez $x-b$)

$$xx = ſx - bſ.$$

(Odiąwſzy $ſx$ po obu ſtronach) $xx - ſx = - bſ$.

(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)

$$xx - ſx + \tfrac{1}{4}ſſ = \tfrac{1}{4}ſſ - bſ = \frac{ſſ - 4bſ}{4}.$$

(Wyciągn: piérw: kwadratu z obu ſtrón)

$$x - \tfrac{1}{2}ſ = \frac{\pm\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

(Dodáwſzy $\frac{1}{2}ſ$ po obu ſtronach)

$$x = \frac{ſ \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

Rozwiązanié. $x = \frac{ſ \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}$.

$$xx = \frac{2ſſ - 4bſ \pm 2ſ\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{4} = \frac{ſſ - 2bſ \pm ſ\sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

$$x - b = \frac{ſ - 2b \pm \sqrt{(ſſ - 4bſ)}}{2}.$$

$$\frac{xx}{x-b} = \frac{ss-2bs \pm s\sqrt{(ss-4bs)}}{2} : \frac{s-2b \pm \sqrt{(ss-4bs)}}{2} =$$

$$\frac{ss-2bs \pm s\sqrt{(ss-4bs)}}{s-2b \pm \sqrt{(ss-4bs)}} = s.$$

265. *Uwága 1.* Aby x, było ilością istotną, a zatém, aby Zagadniénié mogło się rozwiązać, trzeba do tego, aby $\sqrt{(ss-4bs)}$ był ilością istotną: przeto $(ss-4bs)$, powinno bydź ilością przydayną. Więc w poprzedzaiącém rozwiązaniu, náymnieyszá wáżność ss, powinna bydź równá wáżności $4bs$, a zatém náymniéyszá wáżnośc s, wtedy będzie, gdy się równá wáżności $4b$. W takim razie $x = \frac{1}{2}s = 2b$. Więc ciąg, iest wtedy ciągiém Jeometrycznym *półdwóynym* (Progressio subdupla) toiest takim, gdzie każdy wyráz następny, iest połową poprzedzaiącégo.

2. Poki s, iest większé niż $4b$, póty wáżności s, i b, odpowiédaią dwie wáżności x, czyli wáżności piérwszégo wyrazu, tak dalecé, że dwa będą takié ciągi, których taż sama będzie summa, i ténże sám wyráz drugi.

Przykłád. Niech będzie $s = \frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{3}$.

$$x = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{9}{4}-2)}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}}.$$

Dwa ciągi będą $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$ i t. d.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \frac{16}{243}, \frac{32}{729}$ i t. d.

Summa 1go ciągu iest $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

Summa 2go ciągu iest $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Podobnie niech będzie $s = 1\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$.

$$x = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{(\frac{16}{9} - \frac{4}{3})}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{2} = \frac{1\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{\frac{1}{3}}.$$

Dwą ciągi będą $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}$, i t. d.

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \frac{27}{256}$, i t d.

Summa 1go ieſt $\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 : \frac{3}{4} = 1 \times \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Summa 2go ieſt $\dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = \frac{1}{9} : (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{9} : \frac{1}{12} = \frac{1}{9} \times 12 = \frac{12}{9} = 1\frac{1}{3}$.

3. Możná, ilé zechcémy, tylé znaléźć ciągów Jeometrycznych maleiących, którychby ſumma była iednakowá; ponieważ w oznaczéniu poprzedzaiących ważnośći 1go wyrazu doſyć będzie tym końcém odmiéniać co ráz ważność 2go wyrazu.

Wygodniéy iednak ieſt odmiéniać ważność 1go wyrazu, a potém wyprowadzić ſtąd ważność 2go wyrazu. Dlá czégo w równaniu tém $\dfrac{aa}{a-b} = s$, ſzukáymy ważności wyrazu drugiégo b, któryby był oznaczony w jlościach a, i s. Będzie naprzód: $aa = as - bs$, a ſtąd, $b = \dfrac{as-aa}{s} = a - \dfrac{aa}{s}$.

Przykłád. Niech będzie $s = 2$; $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$.
$a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{3}{8}$.
$a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{5}{18}$.
$a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{4}{9}$.
$a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{3}{8}$.

4. Jeżeli weźmiémy a, większé niżeli s, tedy ilość $a - \dfrac{aa}{s}$, czyli b, toieſt wyráz drugi będzie uiémnym, i ciąg ſkłádać ſię będzie z wyrazów na przemiany przydaynych i uiémnych.

Przykł: $a = 3$, $s = 2$, $a - \dfrac{aa}{s} = 3 - \frac{9}{2} = \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$.

Ciąg: $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{32} + \frac{3}{64} - \frac{3}{128}$ i t. d.
$= 3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$ i t. d.)

Szereg tén $(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}$ i t. d.) ieſt różnicą dwóch naſtępuiących ſzeregów.

$(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots)$ i $(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots)$.

Różnica

Różnica ta ieſt $(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)$ $=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots)=\frac{1}{2}(1:\frac{3}{4})=\frac{2}{3}$. które to $\frac{2}{3}$, rozmnożywſzy przez 3, wypadnie 2, toieſt ſumma daná.

266. *Zagádniénié 2. Pewná oſoba, która má ſummę* ſ, *powiękſzá ſwóy maiątek czwártą częścią corocznie, odłączywſzy na wydátki iednakową ſummę na początku każdégo roku: Jakáż powinna bydź ta ſumma, aby maiątek téy oſoby w lát 10, zoſtáł 5 razy tak wielki, iak był na początku?*

Gdyby ta oſoba nie wyłączała nic na wydátki z maiątku ſwégo; tedy na końcu lát 10, maiątek iéy byłby $(\frac{5}{4})^{10}ſ$.

Summa, którą zebrała na początku 1go roku, ſtałaby ſię na końcu 10 lát $(\frac{5}{4})^{10}$ téyże ſaméy ſummy.

Summa, którą zebrała na początku 2go roku, ſtałaby ſię za 9 lát $(\frac{5}{4})^{9}$ onéyże ſaméy.

Summa, którą zebrała na początku 3go roku, ſtałaby ſię za 8 lát $(\frac{5}{4})^{8}$ onéyże ſaméy.

I tak daléy, aż do ſummy, którą ta oſoba zebrała na początku 10tégo roku, która to ſumma przez 1 rok, ſtałaby ſię $\frac{5}{4}$ onéyże ſaméy.

Nazwiéymy wydatek roczny przez x.

Zmnieyſzénié całé maiątku téy oſoby, pochodzącé z wyłączéń wſzyſtkich corocznych na wydátki, to, mówię, zmnieyſzénié wyráżá ſię przez wieloczyn z jlości x, rozmnożonéy przez ſummę ciągu
$(\frac{5}{4}+(\frac{5}{4})^2+(\frac{5}{4})^3+(\frac{5}{4})^4 \;\ldots\; +(\frac{5}{4})^{10}.))$

Tén zaś wieloczyn ieſt $\frac{5}{4}x\left(\frac{(\frac{5}{4})^{10}-1}{\frac{5}{4}-1}\right)=5x\left(\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}\right)$

A maiątek téy oſoby na końcu 10 lát, będzie

$$(\tfrac{5}{4})^{10}ſ-5x\times\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}.$$

A że ta oſoba má mieć na końcu 10 lát, 5 razy tylé, ilé miała na początku; więc

Warunek. $(\frac{5}{4})^{10}ſ-5x\times\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}=5ſ.$

Przeráb: (Dodáwſzy $5x\times\frac{5^{10}-4^{10}}{4^{10}}$ po obu ſtronach)

$$(\tfrac{5}{4})^{10} ſ = 5ſ + 5x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 5)

$$\frac{5^9}{4^{10}} ſ = ſ + x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Odiąwſzy ſ, po obu ſtronach, i przywiódłſzy ié do ułómków)

$$\frac{5^9 - 4^{10}}{4^{10}} ſ = x \times \frac{5^{10} - 4^{10}}{4^{10}}.$$

(Rozmnożywſzy obie ſtrony przez 4^{10})

$$(5^9 - 4^{10}) ſ = x(5^{10} - 4^{10}).$$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez $5^{10} - 4^{10}$)

$$x = \frac{5^9 - 4^{10}}{5^{10} - 4^{10}} ſ = \frac{1953125 - 1048576}{9765625 - 1048576} ſ = \frac{904549}{8717049} ſ = \tfrac{11}{106} ſ. \text{blizko}$$

Przeto, ieżeli ta oſoba miała naprzód Zł. 8717049; tedyby wydátek iéy roczny powinién bydź 904549 Zł. aby ſię práwdziło, iż za lát 10, zbierze 5 razy tylé, ilé miała przed 10 laty.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba, która iuż nie zakłádá ſobie żyć więcéy, iak lát 6, a má z czego utrzymywać ſię przez rok 1, daie ſummę ſ, na 5$\frac{0}{0}$ procéntu. Jakąż część téy ſummy má corocznie wybiérać na roczné wydátki, zacząwſzy od początku 2go roku, aż do początku 6tégo roku, aby wybrawſzy oſtatnią część, nic iéy ſię z kapitálu całégo nie zoſtało.

Inná oſoba chciałaby znowu pod podobnémi, iak tamta, warunkami, aby iéy kapitáł za lát 10, zmnieyſzył ſię do połowy.

Winién kto 10000 Cz: Zł: które má wypłacić za lát 10, bez procéntu. Godzi ſię z wierzycielém, iż mu corocznie równą część wypłacać będzie, zaczynaiąc to wypłacénié za rok (co uczyni 10 równych wypłacéń). *Ileż za każdą razą przydzie mu wypłacić, aby zupełnie dług zaſpokoił, po oſtatniém wypłacéniu, rachuiąc procént ſkłádany po 5$\frac{0}{0}$.*

267. *Zagadniénié 3. Pewná oſoba má 10000 Cz: Zł: od których może mieć ſkłádany procént 5$\frac{0}{0}$, obiérá ſobie iednak dadź tén kapitáł na* przepádek (*á fond perdu*) *byleby corocznie brała od niego aż do śmierci procént po 10$\frac{0}{0}$, toieſt 1000 Cz: Zł: Tén dochód odbieraiąc na końcu każdégo roku, daie go zaráz na procént 5$\frac{0}{0}$, i pozwálá zbiérać ſię co ráz bardziéy tym procéntém. Za ileż lát będzie ta oſoba miała ténże ſám kapitáł, któryby téż była zebrała w tymże czaſie, gdyby*

by była nie dáwała na przepádek swoiéy summy 10000 Cz: Zł: ale tylko na skłádany procént $5\frac{0}{0}$?

Niech będzie x, liczba lát.

Kapitáł téy osoby na końcu lát x, stáłby się 10000 $(\frac{21}{20})^x$ (§. 248).

Dochód 1000 Cz: Zł: który ta osoba odbierze na końcu 1go roku, urośnie przez lát $x-1$, (przez które procént skłádany przynosić będzie) do 1000 $(\frac{21}{20})^{x-1}$.

Dochód 2gi przez lát $x-2$, urośnie do 1000 $(\frac{21}{20})^{x-2}$.

Dochód 3ci, przez lát $x-3$, urośnie do 1000 $(\frac{21}{20})^{x-3}$.

I t. d. aż do ostatniégo dochodu, który ważności swoiéy nie odmiéni.

A zatém cała ważność tego dochodu, na końcu liczby lát szukanéy, będzie

$$1000\left((\tfrac{21}{20})^{x-1}+(\tfrac{21}{20})^{x-2}+(\tfrac{21}{20})^{x-3}+\ .\ .\ .\ 1\right)\text{ albo,}$$

$$1000\left(1+\tfrac{21}{20}+(\tfrac{21}{20})^2+(\tfrac{21}{20})^3+\ .\ .\ .\ (\tfrac{21}{20})^{x-1}\right)=$$

$$\frac{1000\times((\frac{21}{20})^x-1)}{\frac{21}{20}-1}\ (\S 255)=20000\ ((\tfrac{21}{20})^x-1).$$

Warunek. $20000\left((\frac{21}{20})^x-1\right)=10000\,(\frac{21}{20})^x$.

Przerób: (Podzieliwszy obie strony przez 10000)

$2((\frac{21}{20})^x-1)=(\frac{21}{20})^x$. albo $2\times(\frac{21}{20})^x-2=(\frac{21}{20})^x$.

(Dodáwszy 2 po obu stronach)

$2\times(\frac{21}{20})^x=(\frac{21}{20})^x+2$.

(Odiąwszy $(\frac{21}{20})^x$ po obu stronach) $(\frac{21}{20})^x=2$.

(Wziąwszy Logarytm obu strón)

x Log: $\frac{21}{20}$ = Log: 2.

A że Log: $\frac{21}{20}$ = 0, 0211893.

A Log: 2 = 0, 3010300.

Więc $x\times 0,0211893=0,3010300$.

$$\text{a zatém } x=\frac{0,\ 3010300}{0,\ 0211893}=\frac{3010300}{211893}=14\text{ lát }2\tfrac{1}{2}\text{ miesięcy blizko.}$$

Na końcu 14 lát, kapitáł 10000 Cz: Zł: z procéntém skłádanym po $5\frac{0}{0}$, stáłby się $10000\times(\frac{21}{20})^{14}=19799$ Cz: Zł: blizko.

Procént od tego ostatniégo kapitału za półtrzecia miesiąca iest prawie 206 Cz: Zł: które przydáwszy do kapitáłu, będzie ze wszystkiém 20005 Czer: Zł: i to, iest ważność całégo kapitáłu za lát 14, i blizko półtrzecia miesiąca.

Dochód

Dochód roczny 1000 Cz: Zł: z ſkładanym procéntém 5% przez lát 14, czyni ſummę $\frac{1000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}-1\right)}{\frac{21}{20}-1} = 20000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}-1\right) = 20000\left(\left(\frac{21}{20}\right)^{14}\right) - 20000 = 19598$ Cz: Zł: blizko.

Procént od téy oſtatniéy ſummy, za półtrzecia mieſiąca, ieſt prawie 204 Cz: Zł.

Część dochodu przypádaiącá na rok 15ſty za półtrzecia mieſiąca ieſt prawie 207 Cz: Zł:

Summę tych dwóch oſtatnich liczb, dodáwſzy do ważności całégo dochodu przez lát 14, wypadnie 20008 Cz: Zł: na ważność odpowiedaiącą bardzo blizko czaſowi znalezionému.

Ważność cała tego dochodu nie różni ſię od ważności, do któréy byłby przyſzedł piérwiáſtkowy kapitał w tymże czaſie, iak tylko 3 iednościami, względém blizko 20000; toieſt mniéy niż $\frac{1}{6000}$ całégo kapitału.

Inſzé przykłady. Pewná oſoba daie 12000 Cz: Zł: na przepádek, wymawiaiąc ſobie dochód roczny 9% (co wynoſi 1080 Cz: Zł:) *Za iléż lát wybierze tén kapitał wráz z procéntami iego 4%?*

268. *Zagadnienié 4. Winiéném komu dochód roczny 300 Cz: Zł: który przez 20 lát obowiązałém ſię wypłácać, teráz zaráz zaczynaiąc, i rachuiąc procént ſkładany po 5%. Przez iakąż ſummę mogę natychmiáſt tén cały dwudzieſtoletni dochód zaſpokoić?*

Spoſób 1wſzy poſtępowania. Ważność tego dochodu, na początku 20ſtégo roku, dodaiąc 20 naſtępnych wypłacén: będzie

$$300\left(\left(\tfrac{21}{20}\right)^{19}+\left(\tfrac{21}{20}\right)^{18}+\left(\tfrac{21}{20}\right)^{17}+\ .\ .\ .\ .\ .\ 1\right) =$$

$$300\left(\frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{20}-1}{\frac{21}{20}-1}\right) = 6000\left(\frac{21^{20}-20^{20}}{20^{20}}\right)\ (\S.\ 267).$$

Niech będzie x, ſumma teráz zaráz wypłaconá, wyrównywaiącá tamtému dochodowi. Ta ſumma na początku 20ſtégo roku, albo na końcu 19go, ważyć będzie $x \times \left(\frac{21}{20}\right)^{19}$.

Warunek. $x \times \left(\frac{21}{20}\right)^{19} = 6000 \times \frac{21^{20}-20^{20}}{20^{20}}$.

Przerab:

Przerób: (Rozmn: obie ſtrony przez 20^{19})

$$x \times 21^{19} = 6000 \times \frac{21^{20} - 20^{20}}{20} = 300(21^{20} - 20^{20}.$$

Podzieliwſzy obie ſtrony przez 21^{19})

$$x = 300 \frac{(21^{20} - 20^{20})}{21^{19}} = 300 \times 21 - 300 \times \frac{20^{20}}{21^{19}} = 6300 - 6000 \times (\tfrac{20}{21})^{19}.$$

A że $6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 2374$ blizko.

Więc $6300 - 6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 6300 - 2374 = 3926$ blizko.

I ta ieſt ważność dochodu ſzukaná.

2gi ſpoſób. Gdyby tén dochód procéntowy miał bydź nieuſtannym, tedyby winno ſię oddadź kapitał tego dochodu, toieſt 6000 Cz: Zł: których procénta po 5%, ſą 300 Cz: Zł. I oprócz tego, trzebaby dadź ieſzcze 300 Cz: Zł: ponieważ tén dochód má ſię zaráz zaczynać, a nie dopiéro za rók, trzebaby więc ze wſzyſtkiém zapłacić 6300 Cz: Zł:

Ale że tén dochód przypádá tylko wypłacić 20 razy; więc na początku 20ſtégo roku, byłby wypłaconym: a zatém oſoba, która używá tego dochodu, powinnaby oddadź nazád 6000 Cz: Zł: przez lát 19, toieſt powinnaby wypłacić ważność teraźnieyſzą 6000 Cz: Zł: maiących ſię wypłacać przez lát 19. Ta zaś ważność teraźnieyſzá ieſt $6000 \times (\frac{20}{21})^{19} = 2374$ blizko.

Więc oſoba, która winná tén dochód, powinnaby teráz zaráz wypłacić 6300 Cz: Zł. a nazád odebrać 2374: więc powinna w ſaméy rzeczy wypłacić 3926 Cz: Zł:

Inſzé przykłady. Jakáż ieſt ważność teraźnieyſzá rocznégo dochodu 500 Cz: Zł: maiącégo ſię wypłacać przez lát 30, rachuiąc procént po 6%?

Jakáż ieſt ważność teraźnieyſzá rocznégo dochodu 400 Cz: Zł: maiącégo ſię wypłácać przez lát 35, rachuiąc procént po 4%?

269. *Zagadniénié 5. Cały maiątek pewnéy oſoby oſzacowany ieſt na 100000 Zł. z którégo má dochodu rocznégo 4%, toieſt 4000 Zł.*

Téyże oſobie wychodzi corocznie na różné wydatki 10000 Zł. a co nad dochód roczny wydaie, toieſt 6000 Cz: Zł: tego inaczéy pożyczyć nie może, iak z procéntém 10%. Za iléż lát oſoba ta zniſzczy ſię wcale, przypuściwſzy, że wierzyciel dozwálá zbierać ſię procéntóm ſkłádanym od téy ſummy 6000 Cz: Zł: którą naſtępnie pożyczá na początku każdégo roku.

Ta oſoba podług przypuſzczénia muſi corocznie przypożyczyć 6000 Zł. aby wyſtarczyć mogła, na coroczné ſwoié wydatki.

Niech będzie x, liczba lát ſzukaná.

Dług zaciągniony na początku 1go roku, będzie na końcu lat x $6000 \times (\frac{11}{10})^x$.

. . . . 2go roku $6000 \times (\frac{11}{10})^{x-1}$.

. . . . 3go roku $6000 \times (\frac{11}{10})^{x-2}$.

. . . . $x$go roku $6000 \times \frac{11}{10}$.

Więc ważność wſzyſtkich tych długów, na końcu lát x, ieſt

$$6000\left((\tfrac{11}{10})^x + (\tfrac{11}{10})^{x-1} + (\tfrac{11}{10})^{x-2} + (\tfrac{11}{10})^{x-3} + \ldots \tfrac{11}{10}\right).$$

$$= (6000 \times \tfrac{11}{10} \times ((\tfrac{11}{10})^{x-1} + (\tfrac{11}{10})^{x-2} + (\tfrac{11}{10})^{x-3} + \ldots 1).$$

$$= (6000 \times \tfrac{11}{10} \left(\frac{(\frac{11}{10})^x - 1}{\frac{11}{10} - 1} \right) = 66000 \times (\tfrac{11}{10})^x - 66000.$$

Warunek. $66000 \times (\frac{11}{10})^x - 66000 = 100000.$

Przerób: (Dodáwſzy 66000 po obu ſtronach)

$66000 \times (\frac{11}{10})^x = 166000.$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2000).

$33 \times (\frac{11}{10})^x = 83.$

(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 33)

$(\frac{11}{10})^x = \frac{83}{33}.$

(Wziąwſzy Logarytm obu ſtrón)

x Log: $\frac{11}{10}$ = Log: $\frac{83}{33}$.

albo; $x \times 0,0413927 = 0,4005642.$

$$\text{więc } x = \frac{0,4005642}{0,0413927} = \frac{4005642}{413927} = 9 \text{ lát, i co-}$$

kolwiek więcéy niż 8 mieſięcy.

Na końcu lát 9, dług téy oſoby będzie $6000\left((\frac{11}{10})^9 + (\frac{11}{10})^8 + (\frac{11}{10})^7 + \ldots \frac{11}{10}\right) = 6000 \times \frac{11}{10}\left(\frac{(\frac{11}{10})^9 - 1}{\frac{11}{10} - 1}\right) = 66000 \times (\frac{11}{10})^9 - 66000 =$ 89625 Zł.

Procént od téy ſummy za 8 mieſięcy, ieſt prawie .	5955 Zł.
Pożyczénié na początku 10tégo roku na 8 mieſięcy	4000.
Procént za té 8 mieſięcy . . . prawie . . .	266.
Summa długów na końcu 9 lát, i ośmiu mieſięcy .	99846.

Kapitáł

Kapitał na końcu 9 lát . . . . . 89625 Zł.
Procént od tego kapit: za 9 mieſięcy 6722.
Pożyczénié na 9 mieſięcy . . . 4500.
Procént za té 9 mieſięcy . . . 337.

Summa cała . . . 101184.

Więc dług urośnie do 100000 Zł: za lát 9, i cokolwiek więcéy niż 8 mieſięcy.

Inſzé przykłady. Maiątek téy oſoby niech będzie 150000 Zł. Wydátek roczny nad dochód, niech będzie 8000 Zł. a procént od nich 9%.

I znowu, niech będzie maiątek 200000 Zł. wydatek roczny z pożyczanych pieniędzy 10000 Zł. procént od nich 12%.

270. *Zagadnienié 6. Znaléźć trzy liczby, w proporcyi Jeometryczny ciągłéy, których wiadomá ieſt ſumma, i ſumma ich kwadratów.*

Niech będzie trzech liczb ſzukanych ſumma daná . . $2s$.
Summa ich kwadratów . . . . $4q$.
Niech będzie $2x$ ſumma dwóch ſkraynych.
. . . . . $2y$. Różnica tychże.
Dwa wyrazy ſkrayné $x+y$, $x-y$.
Kwadrát śrzedniégo . . . . $xx-yy$; Wyráz śrzedni $\sqrt{(xx-yy)}$ albo $2s-2x$.

Kwadraty trzech wyrazów . . . $xx+2xy+yy$.
$xx \quad -yy$.
$xx-2xy+yy$.

Summa trzech kwadratów . . . . $3xx \quad +yy$.

Warunek $\begin{cases} 3xx+yy=4q. \\ xx-yy=(2s-2x)^2=4ss-8sx+4xx. \end{cases}$

Przerób: (Dodáwſzy ſtrony odpowiédaiącé ſobie we dwóch równaniach) $4xx=4q+4ss-8sx+4xx$.
(Odiąwſzy $4xx$ po obu ſtronach) $o=4q+4ss-8sx$.
(Dodáwſzy $8sx$ do obu ſtrón) $8sx=4q+4ss$.
(Podziel: obie ſtrony przez $4s$) $2x=\frac{q+ss}{s}$. Summa wyrazów ſkraynych.

$$2s - 2x = 2s - \frac{q + ss}{s} = \frac{ss - q}{s}.$$ Wyráz śrzedni.

Aby znaléźć dwa wyrazy ſkrayné, trzeba od kwadratu połowy ich ſummy $\left(\frac{q + ss}{2s}\right)^2$ odiąć kwadrát wyrazu śrzedniégo $\left(\frac{ss - q}{s}\right)^2$; albo wieloczyn dwóch ſkraynych. Reſzta będzie kwadratém połowy ich różnicy, toieſt:

$$\frac{qq + 2qss + s^4}{4ss} - \frac{qq - 2qss + s^4}{ss} = \frac{10qss - 3(qq + s^4)}{4ss}$$

$$= \frac{4qss - 3(q - ss)^2}{4ss}.$$

Więc połowa różnicy dwóch ſkraynych, ieſt $\frac{\sqrt{(4qss - 3(q - ss)^2)}}{2s}$

A zátém dwa wyrazy ſkrayné ſą

$$\frac{q + ss}{2s} + \frac{\sqrt{(4qss - 3(q - ss)^2)}}{2s}; \text{ i } \frac{q + ss}{2s} - \frac{\sqrt{(4qss - 3(q - ss)^2)}}{2s}$$

Proporcyá ſzukaná.

$$\frac{q + ss}{2s} + \frac{\sqrt{(4qss - 3(q - ss)^2)}}{2s}, \frac{ss - q}{s}, \frac{q + ss}{2s} - \frac{\sqrt{(4qss - 3(q - ss)^2)}}{2s}$$

271. *Uwaga. Možná krócéy wynaléźć wyráz śrzedni, albo i ſummę dwóch ſkraynych, w ſpoſób naſtępuiący:*

Fig. 50. Niech będzie AB, ſumma daná trzech ilości, niech PQ, wyráżá liniią, któréy kwadrát byłby równy ſummie kwadratów ilości trzech ſzukanych.

Niech linie AY, XY, wyſtawuią nám dwa wyrazy ſkrayné ſzukané, a liniiá BX, niech wyſtawuie wyráz śrzedni.

$BX = AB - AX.$

Więc; $BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + AX^2.$

A że ieſt $AX = AY + XY.$

Więc, $AX^2 = AY^2 + 2AY \times XY + XY^2.$

$= AY^2 + 2BX^2 + XY^2 = BX^2 + PQ^2.$

Więc, $BX^2 = AB^2 - 2AB \times AX + BX^2 + PQ^2.$

Więc, $0 = AB^2 - 2AB \times AX + PQ^2.$

Więc, $2AB \times AX = AB^2 + PQ^2.$

a zatém,

a zatém, $AX = \frac{AB^2 + PQ^2}{2AB}$. Tož ſamo znaleźliśmy i piérwſzym ſpoſobém.

Przykłady. Niech będzie $2ſ = 30$, $2ſ = 14$, $2ſ = 38$,
$4q = 364$, $4q = 84$, $4q = 532$,

Tymże prawie ſpoſobém trzebaby ſobie poſtąpić, gdyby wiadomy był nadmiár ſummy dwóch ſkraynych, nad wyráz średni, i ſumma trzech kwadratów.

272. *Zagadnienié 7. Znaléźć trzy liczby w proporcyi Jeometryczny ciągłéy, których wiadomá ieſt ſumma, i nadmiár ſummy kwadratów wyrazów dwóch ſkraynych nad kwadrát wyrazu środniégo.*

Niech będzie $2ſ$ ſumma daná; $2q$, różnica kwadratów.

Mianowanié. Summa wyrazów ſkraynych . . . $2x$.
Różnica . . . . $2y$.
Proporcyá . . . $x+y$, $2ſ-2x$, $x-y$.
Kwadraty $xx+2xy+yy$; $4ſſ-8ſx+4xx$; $xx-2xy+yy$.
Summa dwóch kwadratów ſkraynych $2xx+2yy$.
Nadmiár téy ſummy, nad kwadrát wyrazu środniégo . . . . $8ſx-4ſſ-2xx+2yy$.

Warunek $\begin{cases} 8ſx-4ſſ-2xx+2yy=2q. \\ 4ſſ-8ſx+4xx \quad =xx-yy. \end{cases}$

Przeráb: $\begin{cases} 4ſx-2ſſ-xx+yy=q. \\ -8ſx+4ſſ+3xx+yy=o. \end{cases}$

(Odiąwſzy 2gié równanié od 1wſzégo)
$12ſx-6ſſ-4xx=q.$
albo; $4xx-12ſx+6ſſ+q=o.$
(Dopełniwſzy kwadratu w piérwſzéy ſtronie)
$4xx-12ſx+9ſſ=3ſſ-q.$
(Wyciągnąwſzy piérw: kwadr: z obu ſtrón)
$2x-3ſ=\pm\sqrt{(3ſſ-q)}.$
(Dodáwſzy $3ſ$ po obu ſtronach)
$2x=3ſ\pm\sqrt{(3ſſ-q)}.$
(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2)

 $x =$

$$x = \frac{3ſ \pm \sqrt{(3ſſ - q)}}{2}.$$

$$2ſ - 2x = -ſ \mp \sqrt{(3ſſ - q)}.$$

Aby wyráz ſrzedni nie był uiémnym, trzeba użyć drugiégo wyrażénia,

toieſt $x = \frac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)}}{2}$.

$$2ſ - 2x = \sqrt{(3ſſ - q)} - ſ.$$

$$xx - yy = (2ſ - 2x)^2.$$

Więc, $yy = xx - (2ſ - 2x)^2 = \left(\frac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)}}{2}\right)^2 - (\sqrt{(3ſſ - q)} - ſ)^2$

$$= \left(\frac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{(3ſſ - q)} - 2ſ}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)}}{2} + \frac{2\sqrt{(3ſſ - q)} - 2ſ}{2}\right)\left(\frac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)}}{2} - \frac{2\sqrt{(3ſſ - q)} - 2ſ}{2}\right)$$

$$= \frac{ſ + \sqrt{(3ſſ - q)}}{2} \times \frac{5ſ - 3\sqrt{(3ſſ - q)}}{2} = \frac{2ſ\sqrt{(3ſſ - q)} + 3q - 4ſſ}{4}$$

$$y = \frac{\pm\sqrt{2ſ\sqrt{(3ſſ - q)} + 3q - 4ſſ}}{2}.$$

Wyrazy ſkrayné proporcyi $\begin{cases} \dfrac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)} + \sqrt{2ſ\sqrt{(3ſſ - q)} + 3q - 4ſſ}}{2} \\ \dfrac{3ſ - \sqrt{(3ſſ - q)} - \sqrt{2ſ\sqrt{(3ſſ - q)} + 3q - 4ſſ}}{2} \end{cases}$

Wyráz ſrzedni . . . . . . $\sqrt{(3ſſ - q)} - ſ$.

Uwága. To zagadniénié wzięté oddzielnie może mieć cztéry rozwiązania, które przez znaki tylko różnią ſię od ſiebie. Gdyby zaś, zamiáſt, cobyśmy mieli ſzukać dwóch wyrazów ſkraynych przez ich ſummę, albo różnicę, chcieliśmy każdégo z nich dochodzić bezśrzednie; tedyby przyſzło ſię do takiégo równania, w którém ilość niewiadomá byłaby podnieſioná do czwártégo ſtopnia.

Pzykłady Zagadnićnia poprzedzaiącégo.

Niech będzie $2s = 14$, $2s = 42$.
$2q = 52$, $2q = 468$.

Tymże spośobém możnáby rozwiązać i następuiącé Zagadnićnié: *Znaléźć trzy liczby w proporcyi Jeometryczněy, których wiémy nadmiár summy dwóch skráynych nad wyráz śrzedni, i nadmiár summy kwadratów tychże dwóch skraynych nad kwadrát wyrazu śrzedniégo.*

Możná także użyć do rozwiązania tych zagadnićń sposobu drugiégo użytégo w poprzedzaiącém zagadnićniu.

273. *Zagadnićnié 8. Znaléźć cztéry liczby, ciągło Jeometrycznie proporcyonalné, których summa dwóch śrzednich iest* 2a *summa zaś dwóch skraynych* 2b.

Mianowanié. Różnica dwóch śrzednich . . . $2d$.

Dwa wyrazy śrzednié . . . . $a+d$, i $a-d$.

Dwa skrayné . . . . $\frac{(a+d)^2}{a-d}$, i $\frac{(a-d)^2}{a+d}$

Warunek. $\frac{(a+d)^2}{a-d} + \frac{(a-d)^2}{a+d} = 2b$.

Przeráb: (Przywiódłszy dwa ułómki piérwszéy strony, do iednakowégo mianownika) $\frac{(a+d)^3+(a-d)^3}{aa-dd} = 2b$.

(Wykonáwszy oznaczoné dodanié) $\frac{2a^3+6add}{aa-dd} = 2b$.

(Podzieliwszy obie strony przez 2)

$\frac{a^3+3add}{aa-dd} = b$, albo $a\left(\frac{aa+3dd}{aa-dd}\right) = b$.

(Ułożywszy to równanié w proporcyą)

$aa+3dd : aa-dd : b : a$ (A).

(Rozmnożywszy obadwa następniki przez 3)

$aa+3dd : 3aa-3dd = b : 3a$.

(Dodaiąc) $4aa : 3aa-3dd = b+3a : 3a$. (§. 137)

albo $4aa : aa-dd = b+3a : a$ (B).

(Dzie-

(Dzieląc w proporcyi A) $4dd : aa - dd = b - a : a$.

albo $aa - dd : 4dd = a : b - a$.

Składając tę ostatnią proporcyą, z proporcyą B, będzie

$4aa : 4dd = b + 3a : b - a$.

albo $aa : dd = b + 3a : b - a$.

więc $dd = aa \times \frac{b - a}{b + 3a}$.

a zaś $d = a\sqrt{\left(\frac{b - a}{b + 3a}\right)}$.

Rozwiązanie. $a + d = a\left(1 + \sqrt{\left(\frac{b - a}{b + 3a}\right)}\right)$.

$$a - d = a\left(1 - \sqrt{\frac{b - a}{b + 3a}}\right).$$

$$\frac{(a+d)^2}{a-d} = \frac{(a+d)^3}{aa-dd} = \frac{a\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{1 - \frac{b-a}{b+3a}} = \frac{a(b+3a)\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4a}$$

$$= (b+3a)\frac{\left(1+\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4}.$$

$$\frac{(a-d)^2}{a+d} = \frac{(a-d)^3}{aa-dd} = a\left[\frac{\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{1 - \frac{b-a}{b+3a}}\right] = \frac{a(b+3a)\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4a} =$$

$$(b+3a)\frac{\left(1-\sqrt{\left(\frac{b-a}{b+3a}\right)}\right)^3}{4}.$$

Sprawdz:

Sprawdz: $\frac{(a+d)^2}{a-d} + \frac{(a-d)^2}{a+d}$.

$$= (\frac{b+3a}{4}) \left((1+\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}})^3 + (1-\sqrt{\frac{b-a}{b+3a}})^3 \right)$$

$$= \frac{b+3a}{4} (2+6\times\frac{b-a}{b+3a}) = \frac{b+3a}{2} (1+\frac{3b-3a}{b+3a})$$

$$= \frac{b+3a}{2} (\frac{4b}{b+3a}) = \frac{4b}{2} = 2b$$

Przykł: Niech będzie $2a = 36$; $2b = 84$.
$2a = 12$; $2b = 18$.
$2a = 24$; $2b = 36$.

274. *Zagadniénié 9. Znaléźć cztéry liczby ciągło proporcyonalné, których wiémy różnicę śrzednich i różnicę ſkraynych.*

Spoſób poſtępowania ieſt prawie tén ſám, co i w poprzedzaiącém Zadaniu.

Przykł: Różnica śrzednich 18. Różnica ſkraynych 78.
. . . . 4. . . . . 14.
. . . . 8. . . . . 28.

275. *Zagadniénié 10. Znaléźć cztéry liczby, w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą ich ſummę, i ſummę ich kwadratów.*

Summa daná cztérech wyrazów . . . a.
Summa ich kwadratów . . . . . . b.

Mianowanie. Summa dwóch wyrazów śrzednich . . $2x$.
Różnica ich . . . . $2y$.
Wyrazy śrzednié . . . $x+y$.
$x-y$.

Ciąg $\frac{(x+y)^2}{x-y}$, $x+y$, $x-y$, $\frac{(x-y)^2}{x+y}$.

Summa tego ciągu: $2x + \frac{2x^3+6xyy}{xx-yy} = 2x(1+\frac{xx+3yy}{xx-yy}) =$

$$2x\left(\frac{2xx+2yy}{xx-yy}\right)=\frac{4x(xx+yy)}{xx-yy}.$$

Kwadraty. $\frac{(x+y)^4}{(x-y)^2}$, $(x+y)^2$, $(x-y)^2$, $\frac{(x-y)^4}{(x+y)^2}$.

Summa

$$\frac{(x+y)^6+(x-y)^6}{(xx-yy)^2}+(2xx+2yy)=\frac{2x^6+30x^4yy+30xxy^4+2y^6}{(xx-yy)^2}+(2xx+2yy).$$

$$=(2xx+2yy)\left(\frac{x^4+14xxyy+y^4}{(xx-yy)^2}+1\right)=(2xx+2yy)\frac{(2x^4+12xxyy+2y^4)}{(xx-yy)^2}$$

$$=(4xx+4yy)\frac{(x^4+6xxyy+y^4)}{(xx-yy)^2}.$$

Warunek. $\begin{cases} 4x\frac{(xx+yy)}{xx-yy}=a \text{ (A.)} \\ (4xx+4yy)\frac{(x^4+6xxyy+y^4)}{(xx-yy)^2}=b. \text{ (B.)} \end{cases}$

Przerábianié. (Podzieliwszy strony równania B, przez strony odpowiedaiącé, równania A)

$$\frac{x^4+6xxyy+y^4}{x(xx-yy)}=\frac{b}{a} \text{ albo } \frac{(xx+yy)^2+4xxyy}{x(xx-yy)}=\frac{b}{a} \text{ (C.)}$$

(Przywiódłszy równanié A, do Mianownika równania C)

$$\frac{4xx(xx+yy)}{x(xx-yy)}=a\text{(D)}.$$

(Odiąwszy równanié C, od równania D)

$$\frac{4x^4-(xx+yy)^2}{x(xx-yy)}=a-\frac{b}{a}.$$

A żé iest $\frac{4x^4-(xx+yy)^2}{x(xx-yy)}=\frac{2xx+(xx+yy)\ (2xx-(xx+yy))}{x(xx-yy)}=$

(3xx

$$\frac{(3xx+yy)(xx-yy)}{x(xx-yy)} = \frac{3xx+yy}{x}.$$

więc, $\frac{3xx+yy}{x} = a - \frac{b}{a} = \frac{aa-b}{a}.$

więc, $3xx+yy : aa-b = x : a.$

A że, (w równaniu A) $\frac{4x(xx+yy)}{xx-yy} = a.$

więc, $xx+yy : xx-yy = a : 4x.$

a zatém, $xx : yy = a+4x : a-4x.$ (§. 137.)

więc, $3xx : yy = 3(a+4x) : a-4x.$

więc, $3xx : 3xx+yy = 3(a+4x) : 4a+8x.$

więc, $xx : 3xx+yy = a+4x : 4(a+2x).$

a że, $3xx+yy : aa-b = x : a.$

więc, $xx : aa-b = x(a+4x) : 4a(a+2x)$ (§. 139.)

więc, $x : a+4x = aa-b : 4aa+8ax.$

więc, $4aax+8axx = a(aa-b)+4x(aa-b).$

więc, $8axx+4bx = a(aa-b).$

więc, $xx+\frac{b}{2a}x = \frac{aa-b}{8}.$

więc, $xx+\frac{b}{2a}x+\frac{bb}{16aa} = \frac{aa-b}{8}+\frac{bb}{16aa} =$

$$\frac{2a^4-2aab+bb}{16aa} = \frac{a^4+(aa-b)^2}{16aa}.$$

$$x+\frac{b}{4a} = \frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}{4a}.$$

$$x = \frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}-b}{4a}.$$

$$yy = xx\times\left(\frac{a-4x}{a+4x}\right) = \left(\frac{\sqrt{(a^4+(aa-b)^2}-b}{4a}\right)^2\times\frac{aa+b-\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}{aa-b+\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)}}$$

Przykład. Niech będzie $a = 40.$
$b = 820.$

$aa = 1600;$ $\quad \begin{cases} aa-b = 780. \\ (aa-b)^2 = 608400. \\ aa+b = 2420. \end{cases}$

$a^4 = 2560000;$

$a^4 + (aa-b)^2 = 3168400.$

$\sqrt{(a^4+(aa-b)^2)} = 1780.$

$x = \frac{1780-820}{160} = 6.$

$yy = 6^2 \times \frac{2420-1780}{780+1780} = 6^2 \times \frac{640}{2560} = 6^2 \times \frac{64}{256} = 6^2 \times \frac{1}{4} = \frac{36}{4} = 9.$

$y = 3.$

Wyrazy śrzednié . . . $6+3.$ albo $9.$
$6-3.$ $3.$

Ciąg - - - 27, 9, 3, 1.

Inſzé przykłady. $a = 15.$ $a = 65.$
$b = 85.$ $b = 1261.$

276 *Zagadniénié* 11. *Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym maiąc wiadomą ich ſummę, i nadmiár ſummy kwadratów wyrazów dwoch ſkraynych nad ſummę kwadratów wyrazów dwóch śrzednich.*

277. *Zagadniénié* 12. *Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą różnicę ſummy wyrazów śrzednich, od ſummy wyrazów ſkraynych, i różnicę ſummy kwadratów ſkraynych, od ſummy kwadratów śrzednich.*

278 *Zagadniénié* 13. *Znaléźć cztéry liczby w ciągu Jeometrycznym, maiąc wiadomą różnicę między ſummą ſkraynych i ſummą śrzednich, i ſummę kwadratów wſzyſtkich cztérech wyrazów.* (To Zagadniénié zawiérá w ſobie iedno równanié trzeciégo ſtopnia.)

279 Naſtępuiącé Zagadniénié w wielu przypádkach może bydź przeſtóſowané, a w ſzczególności w rachunkach dochodów dożywotnich, z przepádkiém kapitáłu. (Takié dochody nazywaią ſię po Francuzku *viagères*).

Niech będzie ciąg Arytmetyczny . . . . $a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ a+5d \ldots a+d(n-1)$

Niech będzie ciąg Jeometryczny . . . $1,\ p,\ p^2,\ p^3,\ p^4,\ p^5,\ \ldots p^{n-1}.$

Rozmnóżmy (po dwa biorąc) wyrazy tych ciągów odpowiédaiącé ſobie, zrobi ſię ſzereg naſtępuiący: $a,\ ap+pd,\ ap^2+2p^2d,\ ap^3+3p^3d,\ ap^4+4p^4d,\ ap^5+5p^5d$ . . $ap^{n-1}+(n-1)p^{n-1}d.$

Trzeba

Trzeba znaléźć wyrażénié summy tego ostatniégo szeregu.

Szereg tén może bydź rozłożony na następuiące ciągi Jeometryczné, których można znaléźć wyrażénié summ.

$$a+ap+ap^2+ap^3+ap^4+ap^5+ap^6+ap^7+ap^8+ \ldots . ap^{n-1}=a\times\frac{p^n-1}{p-1}.$$

$$dp+dp^2+dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^2+dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp^2\left(\frac{p^{n-2}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^3+dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp^3\left(\frac{p^{n-3}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^4+dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp^4\left(\frac{p^{n-4}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^5+dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp^5\left(\frac{p^{n-5}-1}{p-1}\right)$$

$$dp^6+dp^7+dp^8+ \ldots . dp^{n-1}=dp^6\left(\frac{p^{n-6}-1}{p-1}\right)$$

. . . .

. . . .

$$dp^{n-1}=dp^{n-1}\times\frac{p-1}{p-1}$$

Więc zebranié tego szeregu w jednę summę wychodzi na zebranie w jednę summę szeregu następuiącégo.

$$a\times\frac{p^n-1}{p-1}+dp\times\frac{p^{n-1}-1}{p-1}+dp^2\times\frac{p^{n-2}-1}{p-1}+dp^3\times\frac{p^{n-3}-1}{p-1}+dp^4\times\frac{p^{n-4}-1}{p-1}+$$

$$\ldots . dp^{n-1}\times\frac{p-1}{p-1}.$$

 Opuść-

Opuśćmy piérwſzy wyráz; a wykonáymy oznaczoné mnożénié, w drugich wyrazach będzie

$$\frac{dp^n - dp}{p-1} + \frac{dp^n - dp^2}{p-1} + \frac{dp^n - dp^3}{p-1} + \frac{dp^n - dp^4}{p-1} + \frac{dp^n - dp^5}{p-1} + \ldots \frac{dp^n - dp^{n-1}}{p-1},$$

albo $\frac{n \times dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1}(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+\ldots p^{n-2})$.

$$= n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp}{p-1}\left(\frac{p^{n-1}-1}{p-1}\right).$$

Wiąc wyrażénié ſummy ſzukanéy będzie

$$a \times \frac{p^n - 1}{p-1} + n \times \frac{dp^n}{p-1} - \frac{dp^n - dp}{(p-1)^2}.$$

Uwága. Gdy p, ieſt mnieyſzé od iedności, tedy należy wyrazić tę ſummę pod tym kſztáłtém $a \times \frac{1-p^n}{1-p} - n \times \frac{dp^n}{1-p} + \frac{dp - dp^n}{(1-p)^2}$.

A granicą tego oſtatniégo poſtępowania, będzie $a \times \frac{1}{1-p} + \frac{dp}{(1-p)^2}$.

ROZDZIÁŁ IX.

Zagadniénia niewyznaczoné, i wſtęp do Zagadnién Diiofantycznych.

Widzieliśmy iuż, że do tego, aby Zagadniénié iakié było wyznaczoném, tylé w niém powinno bydź ilości niewiadomych, ilé warunków, któréby iedné od drugich nie zawiſły. Jeżeli tego nie będzie, tedy Zadanié uważané oddziélnie, tylé mieć może rozwiązáń; ilé tylko zechcemy. Atoli cél, do którégo w ſzczególności zmiérzá Zadanié, może znacznie ścieśnić liczbę rozwiązáń, choćby Zagadniénié miało mniéy warunków, niż ilości ſzukanych, iako to obáczymy na przykładach naſtępuiących.

280. *Zadanié* 1. *Znaléźć wſzyſtkié takié liczby, że gdy ié podzielimy przez* 2, *zoſtanie* 1, *gdy zaś ié podzielimy przez* 3, *nic nie zoſtanie.*

Arytmetycznie. Ponieważ té liczby nie daią ſię dzielić przez 2, bez reſzty, więc ſą nie parzyſté. Ale, że té liczby mogą bydź podzieloné przez 3; więc zamknięté będą w naſtępuiącym ciągu.

3, 9, 15, 21, 33, 39, 45, 51, i t. d . . . . którégo ogólném wyrażéniém ieſt $3+6a$, gdzie a, oznáczá iakąkolwiek liczbę cáłkowitą.

Algiebraicznie. Niech x, oznáczá liczbę tylu razy, ilé iedna z liczb ſzukanych zawiérá w ſobie 2: a niech y, oznáczá znowu liczbę tylu razy, ilé taż liczba ſzukaná zawiérá w ſobie 3.

Będziémy mieli dwa wyrażénia naſtępuiącé, liczby ſzukanéy . . . . . $2x+1$, i $3y$.

Warunek. $2x+1=3y$.

Przerábianié. (Odiąwſzy 1, po obu ſtronach) $2x=3y-1$.
(Podzieliwſzy obie ſtrony przez 2)

$$x=\frac{3y-1}{2}=y+\frac{y-1}{2}.$$

Ilość x. powinna wyrážać liczbę cáłkowitą: więc i oznaczénié wáżności x, powinno wyrážać liczbę cáłkowitą: a że iedna część y, téy wáżności, powinna bydź liczbą cáłkowitą; więc i drugá część $\frac{y-1}{2}$. muſi także bydź liczbą cáłkowitą. Niech będzie tą liczbą cáłkowitą liczba nie wyznaczoná a, więc

$$\frac{y-1}{2}=a.$$

Podwoiwſzy obie ſtrony, będzie $y-1=2a$.
Dodáwſzy 1 do obu ſtrón . . . . $y=2a+1$.
a zatém $3y=6a+3$. Wyrażénié liczby ſzukanéy.

To Zagadnienié przyiąć može nieokréśloną liczbę rozwiązáń: iednákże liczba ich daleko ieſt mnieyſzá, niż gdyby ſię miało tylko wzgląd na równanié warunku wziętégo, i ſpoſób wcale ogólny, i oddzielny. Wſzyſtkié tu wyłączaią ſię ułómki, iako téż i wſzyſtkié liczby uiémné, wſzyſtkié ilości nieſpółmierné, i beziſtotné. Wyłączaią ſię nawet i té liczby cáłkowité i przydayné, których kſztált inny ieſt, a nie $6a+3$.

Inſzé

Inſzé przykłady. Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 3, które gdy przez 4 podzielimy, zoſtanie 3.

Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 5, które gdy przez 4 podzielimy, zoſtanie 3.

281. *Zadanié 2. Rachuiąc kto iabłka zebrané w ogrodzie znayduie, iż licząc ié,*

po 2 . . . zoſtaie mu ſię 1.
. . 3 . . . . 2.
. . 4 . . . . 3.
. . 5 . . . . 4.
. . 6 . . . . 5.
. . 7 . . . . 0.

Iléż w ſamén rzeczy zebrał tych iabłek?

1. *Przez rozumowanié.* Piérwſzy warunek zawarty ieſt w trzecim, z którego wypádá, że liczba iabłek ieſt nie párzyſtá.

2. Piąty warunek wypływá koniecznie z drugiégo. Jakoż gdy liczba iaká, ieſt podzielná przez 3; tedy podzieliwſzy ią przez 6, albo nic nie zoſtanie, albo zoſtanie 3. Więc téż gdy podzieliwſzy liczbę iaką przez 3, zoſtanie 2, tedy podzieliwſzy ią przez 6, zoſtanie albo 2, albo 5. A że w piérwſzym razie byłaby ta liczba párzyſtą; więc gdy ieſt niepárzyſtą, zoſtanie 5.

Zadanié więc wypádá na naſtępuiącé:

Znaléźć wſzyſtkié liczby podzielné przez 7, i takié, że gdy ié podzielimy przez 6, zoſtanie 5.
. . . . 5 . . . . . 4.
. . . . 4 3

Jedna z liczby ſzukanéy, powinna ſię zamykać w ciągu naſtępuiącym: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133, 140, 147, i t. d.

Opuśćmy liczby párzyſté, zoſtanie

7, 21, 35, 49, 63, 77, 91, 105, 119 133, 147, i t. d.

Liczba ſzukaná powiękſzoná iednością, powinna bydź podzielną przez 6, 5, i 4.

Przydáymy więc 1 do każdéy liczby ciągu poprzedzaiącégo, a będzie 8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, 106, 120, 134, 148, i t. d.

Opuśćmy té liczby, które nie ſą podzielné, *np* przez 5, toieſt, które ſię nie kończą, albo na 0, albo na 5; zoſtaną z ciągu poprzedzaiącégo tylko dwie

liczby

liczby 50, i 120. Piérwſzá z nich ani przez 6, ani przez 4 nié może bydź podzieloną: drugá zaś wykonywá trzy oſtatnié warunki, toieſt dzielą ią trzy liczby 6, 5, i 4: a zatém liczba 119 ieſt liczbą w piérwſzym ciągu odpowiedaiącą na zadanié, i czyni zadoſyć wſzyſtkim tego zadania warunkóm.

Jeżeli do téy liczby dodámy liczbę podzielną przez każdą z tych liczb 4, 5, i 7, (która to liczba będzie kſztáłtu naſtępuiącégo $420a$) wypadnie ſumma $420a+119$; która ieſt wyrażéniém ogólném liczby ſzukanéy, wziąwſzy za a, iakąkolwiek liczbę cáłkowitą.

Algiebraicznie. Niech x, y, z, v, wyráżaią liczbę tylu razy, ilé liczba ſzukaná powinna zamykać w ſobie 3, 4, 5, 7.

Będziémy mieli cztéry wyrażénia $3x+2$, $4y+3$, $5z+4$, $7v$, na liczbę ſzukaną.

Warunek. $3x+2=4y+3$.

Przeráb: $3x=4y+1$; $x=\frac{4y+1}{3}=y+\frac{y+1}{3}$.

$$\frac{y+1}{3}=a;\ y+1=3a;\ y=3a-1,$$

$$4y=12a-4.$$

$4y+3=12a-1$. Wyrażénié ogólné liczby odpowiedaiącéy dwóm piérwſzém wyrażéniόm.

Warunek 2. $5z+4=12a-1$.

Przeráb: $5z=12a-5$; $z=\frac{12a-5}{5}=2a-1+\frac{2}{5}a$.

$$\tfrac{2}{5}a=b;\ 2a=5b;\ a=2b+\tfrac{1}{2}b.$$

$$\tfrac{1}{2}b=c;\ b=2c.$$

więc $2a=10c$; $a=5c$.

$5z+4=60c-1$. Wyrażénié ogólné liczby odpowiedaiącéy trzém piérwſzém wyrażéniόm.

Warunek 3. $7v=60c-1$.

Przeráb: $v=\frac{60c-1}{7}=8c+\frac{4c-1}{7}$.

$$\frac{4c-1}{7}=d;\ 4c-1=7d;\ 4c=7d+1.$$

$$c=d+\frac{3d+1}{4}$$

$$\frac{3d+1}{4}=e;\ 3d+1=4e:3d=4e-1;\ d=e+\frac{e-1}{3}.$$

$$\frac{e-1}{3}=f;\ e-1=3f;\ e=3f+1.$$

$$d=e+\frac{e-1}{3}=3f+1+f=4f+1.$$

$$c=d+\frac{3d+1}{4}=4f+1+e=4f+1+3f+1=7f+2.$$

$$7v=60c-1=420f+119.$$

Więc wyrażénié liczby ſzukanéy, ieſt liczba iakákolwiek cálkowitá, wziętá razy 420, dodáwſzy do niéy 119; náymnieyſzą zaś tą liczbą ſzukaną, ieſt 119

Inſzé przykłady. Kupiono pewną liczbę łokci ſukna po Zł: 8. i pewną inną liczbę po Zł: 13. Zapłacono za wſzyſtkié łokcie piérwſzégo gatunku Zł: 75 więcéy niż za drugié.

Używá kto robotników mężczyzn i kobiét, płaci po gr: 15 każdému mężczyznie, a po gr: 11 każdéy kobiecie, więcéy zaś wydáł 81 gr: na mężczyzny niż na kobiéty.

282: *Zadanié 3. Niech będzie dany ułómek* $\frac{113}{355}$.

Trzeba znaléźć drugi ułómek $\frac{x}{y}$ *taki, aby różnica tych dwóch ułómków przywiedzionych do iednakowégo mianownika, miała za licznika liczbę cáłkowitą daną* d.

Warunek. $\frac{113}{355}-\frac{x}{y}=\pm\frac{d}{355y}.$

Przerábianié. $\frac{113y-355x}{355y}=\pm\frac{d}{355y}.$

więc,

więc, $113y - 355x = \pm d$.

$$113y = 355x \pm d.$$

$$y = \frac{355x \pm d.}{113} = 3x + \frac{16x \pm d}{113}.$$

$$\frac{16x \pm d}{113} = a. \text{ Liczba całkowita.}$$

$$16x \pm d = 113a; \; 16x = 113a \mp d; \; x = \frac{113a \mp d}{16} = 7a + \frac{a \mp d}{16}$$

$\frac{a \mp d}{16} = b$. Liczba całkowita. $a \mp d = 16b; a = 16b \pm d$.

$$16x = 113(16b \pm d) \mp d = 113 \times 16b \pm 112d.$$

$$x = 113b \pm 7d.$$

$$113y = 355x \pm d = 355(113b \pm 7d) \pm d = 355 \times 113b \pm 2486d.$$

$$y = 355b \pm 22d.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{113b \pm 7d}{355b \pm 22d}.$$

Przykł: *Niech będzie* $b = 0$, $d = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{7}{22}$; $\frac{113}{355} - \frac{7}{22} = \frac{1}{22 \times 355}$.

Niech będzie $b = 1$, $d = 1$.

wtedy $\frac{x}{y} = \frac{120}{377}$; (gdy weźmiémy piérwszy znak +)

$\frac{x}{y} = \frac{106}{333}$; (gdy weźmiémy drugi znak —)

$$\frac{113}{355} - \frac{120}{377} = \frac{1}{355 \times 377}.$$

$$\frac{106}{333} - \frac{113}{355} = \frac{1}{333 \times 355}.$$

Niech znowu będzie iednostaynie $b = 1$; a zaś niech będzie d, koleyno , . , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... 16 Weźmy ráz wráz znak drugi —, wy-

wypadną następuiącé ułómki $\frac{99}{311}$, $\frac{92}{289}$, $\frac{85}{267}$, $\frac{78}{245}$, $\frac{71}{223}$, $\frac{64}{201}$, $\frac{57}{179}$, $\frac{50}{157}$, $\frac{43}{135}$, $\frac{36}{113}$, $\frac{29}{91}$, $\frac{22}{69}$, $\frac{15}{47}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{1}{3}$ Których to ułómków różnice względém piérwszégo ułómku $\frac{113}{355}$ będą następuiącé:

$$\frac{2}{355 \times 311}, \frac{3}{355 \times 289}, \frac{4}{355 \times 267} \; \ldots\ldots \; \frac{16}{3 \times 355}.$$

Tym sposobém postępowania znayduiémy ciąg ułómków, których wyrazy mnieyszé są od wyrazów ułómka danégo, i które tym bardziéy się zbliżaią do równości z tymże ułómkiém; im ich wyrazy mniéy się od niego różnią: a w szczególności znaléźliśmy dwa ułómki $\frac{7}{22}$, i $\frac{106}{333}$, piérwszy mnieyszy, a drugi większy, od ułómku danégo: ale tak mała iest różnica, że przywiodłszy ié osobno, wráz z danym ułómkiém do iednakowégo mianownika, piérwszégo z nich licznik mnieyszy iednością, drugiégo zaś licznik większy iednością tylko będzie od licznika ułómku danégo. Co się téż zgádzá z tém co się powiédziało w Części I Jeometryi, §. 398 i nast: o stosunkach przybliżonych okręgu koła do śrzednicy iego.

283. *Zadanié 4. Niech będzie ułómek dziesiątny 2, 236; który oznácza prawie piérwiástek kwadratowy liczby 5. Trzeba znaléźć ułómki zwyczaynè przybliżaiącé się do wáżności tego piérwiástku kwadratowégo.*

Ułożywszy ułómek dany w tym ksztáłcie $\frac{2236}{1000}$, albo w tym $2+\frac{236}{1000}$, albo nakoniec w tym $2+\frac{59}{250}$, szukać będziémy ułómków, któréby się zbliżały do tégo ułómku $\frac{59}{250}$, i któréby miały mnieyszé od niégo wyrazy.

Znaydziémy tymże iak wyżéy sposobém:

$$\frac{x}{y} = \frac{59b \pm 21d}{250b \pm 89d}.$$

Niech będzie $b=0$, $d=1$.
Wypadnie stąd ułómek $\frac{21}{89}$ bardzo przybliżaiący się do ułómku $\frac{59}{250}$.
Niech będzie $b=1$, $d=1$, i weźmy znak niższy —, wypadnie ułómek $\frac{38}{161}$.
. . . . $b=1$, $d=2$, ... $\frac{17}{72}$.
. . . . $b=2$, $d=3$, ... $\frac{55}{233}$.
. . . . $b=2$, $d=5$, ... $\frac{13}{55}$ i t. d.

Albo tak;

Albo tak; $\frac{59}{250} = \frac{1}{\frac{250}{59}} = \frac{1}{4+\frac{14}{59}} = \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{59}{14}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{3}{14}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{14}{3}}}}$

$$= \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4\frac{2}{3}}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}$$

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}.$$

$$\frac{1}{4+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{17}{4}} = \tfrac{4}{17}.$$

$$\frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{4+\frac{4}{17}} = \tfrac{17}{72}.$$

$$\frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{1}}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}} = \frac{1}{4+\frac{5}{21}} = \tfrac{21}{89}.$$

Tym! ſpoſobém poſtępowania znayduiémy naſtępnie ułómki $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{17}{72}$, $\frac{21}{89}$, które co ráz bardziéy przybliżaią ſię do dawnégo ułómka $\frac{59}{250}$; tak dalece, że *np.* $\frac{17}{72} - \frac{59}{250} = \frac{1}{9000}$ tylko.

Zamiár tych, które daiémy, początków, nie pozwálá nám dłużéy bawić ſię około takowych dziáłáń, które Matematycy tego wieku, okázáwſzy liczné ich przyſtóſowania, bardzo wáżnémi uczynili. Obácz w téy mierze *np. Algiebrę* SAUNDERSONA, Dzieło EULERA, pod tytułém *Introductio ad Analyſim infinitorum*, a oſobliwie przydatki P. DE LA GRANGE, do Algiebry EULERA, po Francuzku wydané.

284. *Zadanié 5. Kupił kto péwną liczbę łokci ſukna po Zł: 12, i znowu kupił inną liczbę łokci innégo gatunku ſukna po Zł: 17. Zapłacił za wſzyſtko Zł. 479.*

Iląż ſpoſobami mogło ſię ſtać to kupno, przypuściwſzy, że liczba łokci ſukna oboyga gatunków była cáłkowitá?

Mianowanié. Niech będzie liczba łokci ſukna po Zł: 12 . . . x.

. . . . 17 . . . y.

Zapłata za wſzyſtkié łokcie 1go ſukna. . . . $12x$.

. . . . 2go. . . . . $17y$.

Warunek. $12x + 17y = 479$.

Przerábianié. $12x = 479 - 17y$.

$$x = \frac{479 - 17y}{12} = 39 - y + \frac{11 - 5y}{12} = 39 - y - \frac{5y - 11}{12}.$$

Ponieważ x, powinno bydź liczbą cáłkowitą; więc $39 - y - \frac{5y-11}{12}$ powinno także bydź liczbą cáłkowitą.

A że $39 - y$, ieſt liczbą cáłkowitą, ieżeli y, ieſt liczbą cáłkowitą; więc także $\frac{5y-11}{12}$, powinno bydź liczbą cáłkowitą.

Niech będzie $\frac{5y-11}{12} = a$. liczba cáłkowitá.

więc, ... $5y - 11 = 12a$.

$5y = 12a + 11$.

$$y = \frac{12a + 11}{5} = 2a + 2 + \frac{2a + 1}{5}.$$

Przez rozumowanié podobné poprzedzaiącému, będzie $\frac{2a+1}{5} = b$. liczba cáłkowitá.

$2a + 1 = 5b$.

$2a = 5b - 1$.

$a =$

$$a = \frac{5b - 1}{2} = 2b + \frac{b - 1}{2}.$$

$\frac{b-1}{2} = c.$ liczba całkowitá.

$b - 1 = 2c.$

$b = 2c + 1.$

$a = 2b + c = 5c + 2.$

$y = 2a + 2 + b = 12c + 7.$

$x = 39 - y - a = 39 - (12c + 7) - (5c + 2) = 39 - (17c + 9) = 30 - 17c.$

Rozwiąz: $x = 30 - 17c; \; \ldots \; 12x = 360 - 12 \times 17c.$

$y = 12c + 7; \; \ldots \; 17y = 119 + 12 \times 17c.$

Sprawdzénié. $12x + 17y = 479.$

W Zagadniéniach poprzédzaiących ostatnié, liczba rozwiązáń była nieograniczoną: ponieważ można było ilości niewyznaczonéy, w którey niewiadomé ilości były wyrażoné dadź taką ważność całkowitą i przydayną, iakąbyśmy tylko chcieli. W zadaniach zaś gatunku takiégo, iak ostatnié zadanié, liczba rozwiązáń iest ograniczoną.

Jakoż aby y, było przydayném; trzeba do tego, aby można odiąć $17c$ od 30, więc $17c$ nie powinno bydź większé od 30, a zatém c, nie powinno bydź większé od $\frac{30}{17}$, albo od $1\frac{13}{17}$.

Aby także x, było przydayném, trzeba do tego, aby $12c + 7$ nie było mnieysze od o, więc $12c$ nie powinno bydź mnieyszé od -7, a zatém c, nie powinno bydź mnieyszé od $-\frac{7}{12}$. A zatém ważność c, iest między $-\frac{7}{12}$ i $1\frac{13}{17}$. A że c, bydź ma liczbą całkowitą; a między $-\frac{7}{12}$, i $1\frac{13}{17}$ dwie tylko są liczby całkowité o, i 1, więc dwie tylko mogą bydź ważności odpowiedaiącé na zadanié, toiest o, i 1.

Rozwiązania szczególné, które tylko samé odpowiédaią Zagadniéniu. $\left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ y = 7 \end{array} \right.$ albo $\begin{array}{l} 13. \\ 19. \end{array}$

$12x = 360 \; \ldots \; 156.$

$17y = 119 \; \ldots \; 323.$

$12x + 17y = 479 \; \ldots \; 479.$

Inszé

Inſzé przykłady. 30 *Mężczyzn, i* 17 *kobiet odebrało razém w nagrodę roboty Zł:* 509. *Iléż ieſt ſpoſobów, któremi możnáby zapłacić każdému mężczyźnie i każdéy kobiécie, aby iednak ſumma zawſze iednakowá wychodziła?*

Kupiono pewną liczbę łokci ſukna po 25 *Zł: i pewną liczbę łokci materyi po Zł:* 7: *zapłacono ze wſzyſtkiém Zł:* 995.

Kupiono 40 *ſztuk bydła, toieſt wołów, krów, i owiec,*

Każdy wół koſztowáł	*Zł:*	120.
. . . . *krowa*		90.
. . . . *Owca*		24.
Dano za wſzyſtko Zł:		2838.

285. *Zadanié* 6. *Znaléźć wſzyſtkié ſpoſoby, którémi boki proſtokąta mogą bydź wyrażoné w liczbach cáłkowitych, tak iednak, aby zawſze obwód tego proſtokąta, tylé zawiérał zwyczaynych ſtóp, ilé powiérzchniá iego zawiérá ſtóp kwadratowych.*

Mianowanié Niech będą boki proſtokąta . . x. i y.
Obwód iego . . . . . . $2x+2y$.
Powiérzchniá . . . . . . xy.

Warunek $xy = 2x+2y$.

Przerábianié. $xy - 2x = 2y$; albo $x(y-2) = 2y$.

więc $x = \frac{2y}{y-2}$. Licznik $2y$ ieſt tu dwa razy tak wielki, iak piérwſzy mianownika wyráz y. Dodáymy, i odeymiymy od tego licznika drugi wyráz mianownika podwóynie wzięty; będzie

$$x = \frac{2y-4+4}{y-2} = \frac{2y-4}{y-2} + \frac{4}{y-2} = \frac{4}{y-2}.$$

Aby x, było liczbą cáłkowitą, trzeba aby téż $\frac{4}{y-2}$ było liczbą cáłkowitą, więc 4 powinno bydź podzielné przez $y-2$: a zatém $y-2$ powinno równać ſię iednému z dzielników liczby 4.

A że takiémi dzielnikami ſą trzy liczby, 1, 2, 4; więc wáżności y, ſą trzy, 3, 4, 6, a wáżności x, odpowiedaiącé tamtym ſą 6, 4, 3.

Dwa

Dwa więc Rozwiązania ma Zadanié, toieſt bok iedén proſtokąta má 3 ſtopy, a drugi 6: albo tak iedén iak i drugi má 4 ſtopy.

Inſzé przykłady. Powiérzchniá proſtakąta powinna zawiérać 2, 3, 4, i t. d. razy tylé ſtòp kwadratowych, ilé ſtòp zwyczaynych zawiérá obwòd tegoż proſtokąta.

Niech znowu będzie Ròwnoległościán praſtokątny, ktòrégo ieden bok má 3 ſtopy. Znaléźć dwa inné boki tego ròwnoległościanu w liczbach cáłkowitych, tak iednak, aby bryłowatość iego, tylé ſtòp ſześciénnych zawiérała, ilé powiérzchniá iego zawiérá ſtòp kwadratowych.

286. *Zadanié 7. Znaléźć wſzyſtkié ſpoſoby napełniénia mieyſca, ktòré ieſt na płaſzczyźnie około iakiégo punktu, używaiąc do tego ſamych tylko kątòw wielokątòw foremnych.*

Widzieliśmy *w Częśći I. Jeom: §. 88,* że używaiąc kątów wielokątów foremnych iednégo gatunku, trzy tylko były ſpoſoby napełniénia niémi mieyſca na płaſzczyźnie około iakiégo punktu, toieſt że to mieyſcé napełnić ſię może.

6 kątami troykąta proſtokątnégo.
4 kątami kwadratu.
i 3 kątami ſześciokąta forémnégo.

Więcéy iednak ieſt ſpoſobów napełniénia tego mieyſca, gdy użyiémy kątów, wielokątów forémnych różnégo gatunku: ktòréto ſpoſoby wſzyſtkié teráz wyliczymy.

1. *Użyymy 4 kątòw tròykąta ròwnobocznégo:* mieyſcé niémi napełnioné, zawiérać będzie 4 razy $\frac{2}{3}$ kąta proſtégo, albo 2 $\frac{2}{3}$ kąta proſtégo: zoſtanie ieſzcze do napełniénia 1$\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, którą to ważność má w ſobie 1 kąt ſześciokąta forémnégo.

2. *Użyymy trzech kątòw tròykąta ròwnobocznégo:* zoſtaną ieſzcze do napełniénia dwa kąty proſté, co tylko wykonać potrafią dwa kąty kwadratu: ponieważ każdy kąt wielokąta, maiącégo większą liczbę boków od kwadratu, ieſt téż większy niż kąt proſty.

3. *Użyymy dwóch kątów tròykąta ròwnobocznégo, i iednégo kąta kwadratu:* zoſtanie ieſzcze do napełniénia 1$\frac{2}{3}$ kąta proſtégo. Więc kąt zewnętrzny wielokąta forémnégo, którégo kąta wewnętrznégo użyć trzeba, do napełniénia tego mieyſca, ważyć będzie $\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, albo $\frac{1}{12}$ cztérech kątów proſtych. A że ważności kąta zewnętrznégo wielokąta forémnégo, dochodzimy dzieląc 4 kąty proſté przez liczbę boków wielokąta forémnégo, (Część I. Jeom: §. 86. i naſtęp:) więc liczba boków wielokąta, którégo użyć trzeba do dopełniénia mieyſca tego ieſt 12.

Jeżeli, oprócz dwóch boków tróykąta równobocznégo, użyiémy kąta pięciokąta, (którégo ważność ieſt $1\frac{1}{5}$ kąta proſtégo) zoſtanie ieſzcze do napełniénia $1\frac{7}{15}$ kąta proſtégo. Więc kąt zewnętrzny wielokąta użyć ſię maiącégo, powiniénby mieć $\frac{8}{15}$ kąta proſtégo, albo $\frac{2}{15}$ cztérech kątów proſtych: co w żadnym wielokącié forémnym bydź nié może. Jeżeli zaś na mieyſcé kąta pięciokąta, użyiémy kąta ſześciokąta forémnégo, który waży $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo; tedy zoſtanie ieſzcze do napełniénia $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, co także wykona iedén kąt, ſześciokąta forémnégo.

Co do wielokątów trzymaiących większą liczbę boków od ſześciokąta: dwa ich kąty ważą więcéy niż dwa kąty ſześciokąta, a zatém wráz z dwómá kątami tróykąta równobocznégo, nié mogą napełnić mieyſca na płaſzczyźnie około iakiégo punktu.

4. *Użyymy iednego tylko kąta tròykąta ròwnobocznégo.* Jeżeli, oprócz tego, użyiémy iednégo ieſzcze kąta kwadratu; zoſtaną do napełniénia $2\frac{1}{3}$ kąta proſtégo: żádén zas kąt na to ſię nie zdá ze wſzyſtkich wielokątów, których liczba boków ieſt większá nad 6. Jeżeli przydámy drugi kąt kwadratu; zoſtanie do napełniénia $1\frac{1}{3}$ kąta proſtégo, któráto ważność ieſt 1 kąta ſześciokąta.

Gdyby używſzy 1 kąta tróykąta równobocznégo, i kąta 1 kwadratu, użyliśmy ieſzcze 1 kąta pięciokąta; zoſtálby do napełniénia $1\frac{2}{15}$ kąta proſtégo: czégo żadén z kątów wielokąta forémnégo wykonać nié może. *Nakoniec ieżeli z dwoma piérwſzémi kątami, użyiémy kąta ſześciokąta forémnégo*; tedy czwárty kąt dopełniaiący mieyſcé, będzie kątém kwadratu, tak, iak iuż wyżéy widzieliśmy.

Niech znowu, oprócz kąta Tróykąta równobocznégo, drugi kąt będzie Pięciokąta forémnégo, (ieżeli to bydź może). W takim razie zoſtaną do napełniénia $2\frac{2}{15}$ kąta proſtégo: czego żádén z kątów Wielokątów wyżſzych nad pięciokąt, nié dokáże: bo lubo taki Wielokąt miálby każdy kąt większy, niż $1\frac{1}{5}$ kąta proſtégo: ale zawſze mnieyſzy niż 2 kąty proſté.

Niech ieſzcze, oprócz kąta Tróykąta ròwnobocznégo, drugi kąt będzie Sześciokąta: zoſtaną do napełniénia 2 kąty proſté: czego żádén kąt Wielokątów wyżſzych od Sześciokąta dokázać nié może, ale tylko dwa kąty kwadratu, iako to iuż wyżéy pokázaliśmy.

Gdyby naoſtatek z kątém 1 Tróykąta ròwnobocznégo, chcieliśmy użyć innych kątòw, z *ktòrych każdy należáłby do Wielokąta wyżſzégo nad ſześciokąt;* tedy, ponieważ trzy takié kąty większé ſą od 4 kątów proſtych, nie trzebaby ich tylko dwa do napełniénia mieyſca pozoſtałégo.

Niech

Niech będą m i n, liczby boków w tych dwóch Wielokątach.

Każdy kąt ich ważyć będzie w kątach prostych $2 - \frac{4}{m}$, i $2 - \frac{4}{n}$.

(Część I. Jeometryi §. 85.)

Warunek. $\frac{2}{3} + 2 - \frac{4}{m} + 2 - \frac{4}{n} = 4.$

Przerábianié. $\frac{2}{3} - \frac{4}{m} - \frac{4}{n} = 0.$

albo, $\frac{1}{3} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} = 0.$

więc, $\frac{1}{3} = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} = \frac{2n+2m}{mn}$; a zatém $\frac{mn}{3mn} = \frac{6n+6m}{3mn}$

więc, $mn = 6n + 6m.$

$mn - 6m = 6n.$

$$m = \frac{6n}{n-6} = \frac{6n-36}{n-6} + \frac{36}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}.$$

Dzielnikami liczby 36, są 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Więc ważnościami ilości $n-6$, mogą bydź niektóré z tych liczb: ważności zaś odpowiedaiącé ilości n, są 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42, a ważności odpowiedaiącé ilości m, będą 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7.

Co daie pięć różnych sposobów napełniénia mieysca, około punktu trzema kątami Wielokątów forémnych, z których iedén tylko byłby kątém Tróykąta równobocznégo.

5. *Jeżeli użyiémy 3, albo dwóch kątów kwadratu*; tedy mieyscé pozostałé będzie napełnioné w piérwszym razie przez 1 kąt kwadratu, w drugim zaś razie, albo przez dwa kąty kwadratu, albo przez 1 kąt Tróykąta prostokątnégo i kąt sześciokąta.

Jeżeli użyiémy 1 kąta kwadratu; tedy zostaną iesżcze do napełniénia 3 kąty proste: które to mieyscé napełnioné bydź powinno naywięcéy przez 2 kąty Wielokątów wyższych od kwadratu.

Niech będą m, i n, liczby boków tych Wielokątów.

Ich kąty ważyć będą w kątach prostych.

 2—

$$2-\frac{4}{m},\ \text{i}\ 2-\frac{4}{n},\ \text{albo}\ 4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right).$$

Warunek. $4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=3.$

Przeráb: $1-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=0.$

$$1=\frac{4}{m}+\frac{4}{n}.$$

albo; $\frac{mn}{mn}=\frac{4n+4m}{mn}.$

więc, $mn = 4n+4m.$

a zatém $mn-4m=4n.$

albo; $m(n-4)=4n.$

więc $m=\frac{4n}{n-4}=\frac{4n-16}{n-4}+\frac{16}{n-4}.$

Dzielniki liczby 16, toieſt ważności ilości $n-4$,

ſą . . . . , . . 1, 2, 4, 8, 16.

Ważności odpowiedaiącé ilości n . . . . 5, 6, 8, 12, 20.

Ważności odpowiedaiącé ilości m. . . . 20, 12, 8, 6, 5.

Więc używſzy iednégo tylko kąta kwadratu, trzy ſą ſpoſoby napełniénia mieyſca pozoſtałégo dwoma kątami wielokątów forémnych, toieſt iednym kątém Pięciokąta, i iednym Dwudzieſtokąta; iednym kątém Sześciokąta, i iednym Dwunaſtokąta; i dwoma kątami Ośmiokąta.

6. *Jeżeli użyiémy iednégo kąta Pięciokąta*, tedy mieyſcé pozoſtałé, powinno ſię napełnić przez dwa także kąty.

Niech będą m, i n, liczby boków Wielokątów, których kąty powinny napełnić mieyſcé pozoſtałé. Ważności tych kątów ſą, $2-\frac{4}{m}$, i $2-\frac{4}{n}$; których ſumma ieſt $4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)$. A że ta ſumma powinna ważyć w kątach proſtych $4-(1\frac{1}{5})$; więc

4 —

$$4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=4-(1\tfrac{1}{5}).$$

albo $\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=\frac{6}{5}$.

$$20m+20n=6mn.$$
$$6mn-20m=20n.$$
$$m(6n-20)=20n.$$
$$m=\frac{20n}{6n-20}=\frac{10n}{3n-10}.$$

A że $\frac{10n}{3n-10}$ powinno bydź liczbą cáłkowitą; więc także liczbą cáłkowitą będzie $\frac{30n}{3n-10}$. Że zaś $\frac{30n}{3n-10}=\frac{30n-100}{3n-10}+\frac{100}{3n-10}=10+\frac{100}{3n-10}$.

Więc $\frac{100}{3n-10}$ powinno téż bydź liczbą cáłkowitą: a zatém $3n-10$, powinno bydź dzielnikiém liczby 100.

A że dzielnikiém liczby 100.

ſą . . . . . 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

więc $3n-10=$ 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

$3n=$ 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110.

A ważności cáłkowité ilości n, ſą . . . 4, 5, 10, 20.

Ważności odpowiedaiącé ilości m . . . 20, 10, 5, 4.

Więc dwa ſą ſpoſoby napełniénia mieyſca około punktu trzéma kątami, z których iedén byłby kątém Pięciokąta. Piérwſzy z tych ſpoſobów, iuż był wyżéy wynaleziony: w drugim używá ſię dwóch kątów Pięciokąta, i iednégo kąta Dzieſięciokąta.

7. *Nie zoſtaie iuż, tylko użyć ieſzcze trzech kątów Sześciokąta:* ponieważ każdy kąt Wielokąta maiącégo więcéy niż 6 boków większy ieſt niż kąt ſześciokąta; a zatém trzy iakiékolwiek kąty Wielokątów wyżſzych od Sześciokąta, ważyłyby więcéy niż 4 kąty proſté. Ponieważ zaś każdy kąt iakiégożkolwiek Wielokąta forémnégo waży mniéy niż 2 kąty proſté; więc trzeba przynáymniéy trzech kątów Wielokątów forémnych do napełniénia mieyſca około punktu.

Powtórzénié. Sposoby napełniénia mieysca około punktu na płaszczyźnie, przez kąty Wielokątów forémnych.

Napełnią to mieyscé.

1. 6 Kątów Tróykąta równobocznégo.
2. 4 Kąty Tróykąta równobocznégo i kąt Sześciokąta.
3. 3 Kąty Tróykąta równobocznégo i 2 kąty kwadratu.
4. 2 Kąty Tróyk: równob: 1 kąt kw: i 1 kąt Dwunastokąta.
5. 2 . . . . i 2 kąty Sześciokąta.
6. 1 Kąt Troyk: równob: 2 kąty kw: i 1 kąt Sześciokąta.
7. . . . . i 1 kąt Siedmiokąta, i 1 kąt Cztérdziest:
8. . . . . i 1 kąt Ośmiokąta, i 1 kąt Dwudziestoczwar.
9. . . . . i 1 kąt Dziewięć: i 1 kąt Osimnastokąta.
10. . . . . i 1 kąt Dziesięciok: i 1 kąt Piętnastokąta.
11. . . . . 2 kąty Dwunastokąta.
12. 4 Kąty kwadratu.
13. 1 Kąt kwadratu, 1 Pięciokąta, i 1 Dwudziestokąta.
14. . . . . 1 Sześciokąta, i 1 Dwunastokąta.
15. . . . . i 2 Ośmiokąta.
16. 2 Kąty Pięciokąta, i 1 Dziesięciokąta.
17. 3 Kąty Sześciokąta.

Z tych różnych sposobów niektóre takié są, że używszy ich do napełniénia mieysca około punktu, można ié daléy ciągnąć do przykrycia iakiégo mieysca na płaszczyźnie, i mogą bydź przystósowané w Budownictwie domowém. I takié są z pomiędzy wzwyż wyliczonych, 1wszy, 12y, 14y, 15y, 17.

287. *Zadanié 7. Znaléźć trzech boków Tróykąta prostokątnégo takié wyrażénia, aby boki té były spółmiérné.*

Mian: Niech będą x, i y, dwa ramiona kąta prostégo tego Tróykąta. Summa kwadratów tych 2 ramión, albo kwadrát przeciwprostokątnéy, będzie $xx+yy$.

Aby przeciwprostokątna, była spółmierną, trzeba do tego, żeby to wyrażénié $xx+yy$ było kwadratém.

Niech będzie $x+v$ piérwiástkiém tego kwadratu.

Warunek. $xx+yy=(x+v)^2$.

Przerábianié. $xx+yy=xx+2vx+vv$.

$yy= \quad 2vx+vv$.

$2vx=yy-vv$.

$x=$

$$x = \frac{yy - vv}{2v}.$$

$$xx = \frac{y^4 - 2vvyy + v^4}{4vv}.$$

$$xx + yy = \frac{y^4 + 2vvyy + v^4}{4vv} = \left(\frac{yy+vv}{2v}\right)^2$$

Więc gdy y, i v, ſą ilościami ſpółmiernémi, to i trzech boków Tróykąta proſtokątnégo wyrażénia, któréby té boki ſpółmiernémi oznaczyły będą y, $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy+vv}{2v}$. A zatém té trzy boki ſą do ſiebie, iak té trzy ilości $2vy$, $yy-vv$, i $yy+vv$.

Przykłady. Niech będzie $y = 2$; $v = 1$.

W takim razie 3 boki będą *4, 3, 5*,

Niech będzie $y = 3$; $v = 2$.

W takim razie 3 boki będą 12, 5, 13.

288. *Przyſtòſowanié. Znaléźć wyrażénia ſpòłmierné iakiégokolwiek Tròykąta takié, aby wyſokość iego, a zatém i powiérzchniá i promiénié koła wpiſanégo, i opiſanégo, były także wyrażoné ſpòłmiernie.*

To Zagadnięnié łatwo przywieśdź do poprzedzaiącégo.

Jakoż oznaczywſzy wyſokość Tróykąta przez y, a dwa odcinki podſtawy, które czyni proſtopadłá, oznaczywſzy przez $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy-xx}{2x}$ dwa inné boki będą, iedén $\frac{yy+vv}{2v}$, drugi $\frac{yy+xx}{2x}$. Podſtawa oznaczoná będzie przez ſummę albo przez różnicę dwóch odcinków $\frac{yy-vv}{2v}$, i $\frac{yy-xx}{2x}$, toieſt przez $\frac{x(yy-vv) \pm v(yy-xx)}{2vx}$; (przez ſummę, gdy proſtopadłá przypádá na ſamę podſtawę, przez różnicę, gdy proſtopadłá przypádá na przedłużénié podſtawy.) A zatém trzy boki Tróykąta, i wyſokość, będą do ſiebie iak té wyrażénia $x(yy-vv) \pm v(yy-xx)$; (albo $(yy-vx)(x \pm v)$), $x(yy+vv)$, $v(yy+xx)$, i $2vxy$; gdzie x, y, v. znaczą ilości ſpółmierné i całkowité.

Wyra-

Wyrażénié powiérzchni $vxy(x(yy-vv) \pm v(yy-xx))$.
$= vxy(yy-vx)(x \pm v)$.

Wyrażénié promiénia koła wpisanégo wypadnie z podzielénia powiérzchni, przez połowę obwodu, i będzie

$$\frac{vxy(yy-vx)(x+v)}{xyy+vyy} \text{ albo } \frac{vxy(yy-vx)(x-v)}{xyy+vxx}.$$

toiest $\ldots\ldots \frac{vx(yy-vx)}{y}$ albo $\frac{vy(yy-vx)(x-v)}{yy+vx}$.

Wyrażénié promiénia koła opisanégo, wypadnie stąd, iż Prostokąt z średnicy przez wysokość, równá się Prostokątowi ze dwóch boków: a zatém wyrażénie średnicy, będzie równé wyrażéniu Prostokąta ze dwóch boków, podzielonému przez wyrażénié wysokości, a połowa tego wszystkiégo będzie wyrażéniém promiénia koła opisanégo, toiest $\frac{x(yy+vv) \times v(yy+xx)}{4vxy} = \frac{(yy+vv)(yy+xx)}{4y}$.

Przykład. Niech będzie $y=3, v=1, x=2$.

Będą boki Tróykąta $2(8) \pm 1 \times 5$; $2(10)$; $1(13)$.
toiest $\frac{21}{11}$; 20 13.

Wysokość 12.

Promién koła wpisanégo $\frac{14}{3}$; albo 3,

Promién koła opisanégo $\frac{65}{6}$.

Wyrażénia całkowité (rozmnożywszy wszystkié poprzedzaiącé przez 6) będą

Podstawa $\frac{126}{66}$. Boki 120; 78. Wysokość 72.

Promién koła wpisanégo $\frac{28}{18}$ koła opisanégo 65.

Powiérzchnia $\frac{4536}{2376}$.

Zadania gatunku takiégo, iakiégo iest poprzedzaiącé, w których rzecz idzie o to, aby dokazać tego, iżby podané ilości, były kwadratami, nazywané są *Zagadniéniami Diiofantycznémi*, od nazwiska Matematyka, którégo pozostało iedno całé dzieło w téy materyi. Gdybyśmy mieli obszérniéy nią się zatrudniać, przechodziłoby to zamiár tych początków Algiebry. Kto zechce więcéy w téy mierze nabydź wiadomości niech czyta Algiebrę SAUNDERSONA, a mianowicie drugi Tom Algiebry EULERA, gdzie znaydzie dokładnie to, czego żądá.

KONIEC ALGIEBRY.

A Fig. 1. D E C

X Z B E A
Fig. 3.
Y D C

E X B A
Fig. 4.
D Y C

X E B
Fig. 6.
Y D C

B X A
Fig. 7.
Y D C

E
Fig. 9.
B X C D A
E

A X B
Fig. 8.
D Y C

A E B X E Z F
Fig. 10.
C D Y

Fig. 11. C Y D

H A X B G

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

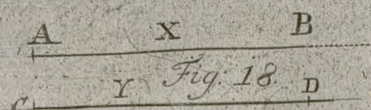
A C E D Z
Fig. 2.
X B F

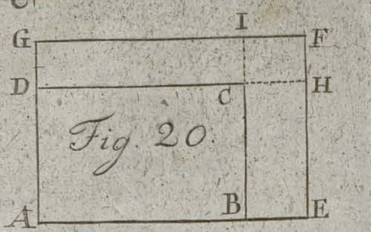
Z Y S P R T Q A X
Fig. 15.

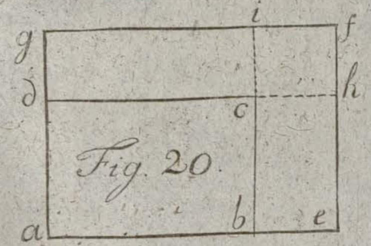
Z Y P R T A Q X r t
Fig. 16.

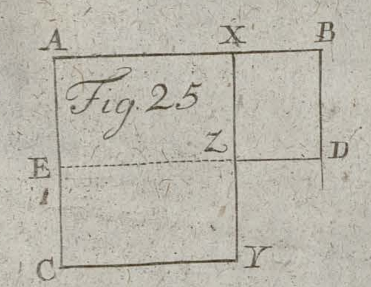
S P Y Z Q X B A
Fig. 17.

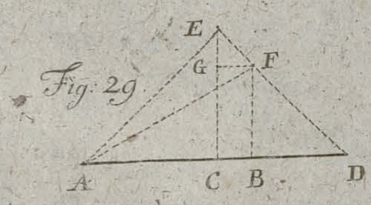
E B X A
Fig. 5.
D Y C

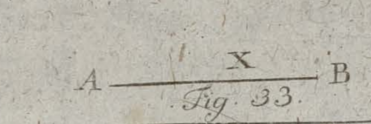

Fig. 18

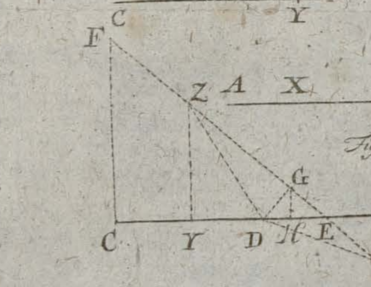

Fig. 20


Fig. 20

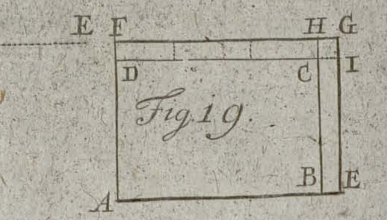

Fig. 25

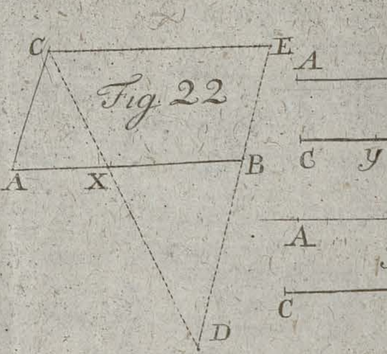

Fig. 29

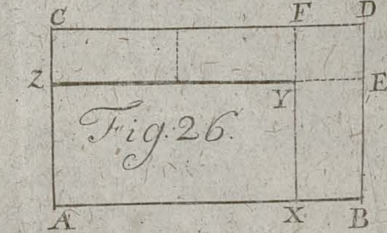

Fig. 33

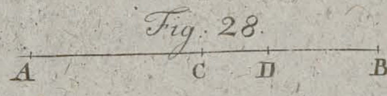

Fig. 34

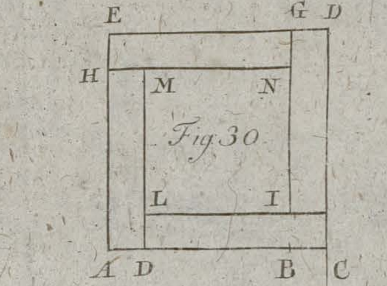



Fig. 19


Fig. 22


Fig. 26


Fig. 28


Fig. 30

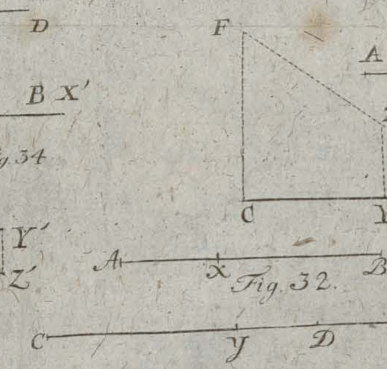
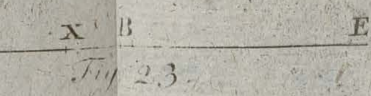

Fig. 32


Fig. 21


Fig. 23

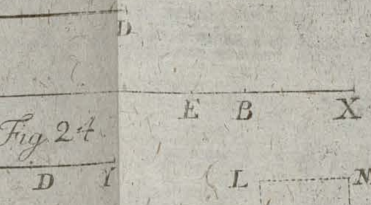
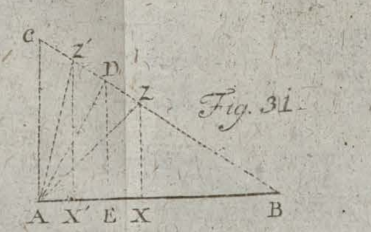
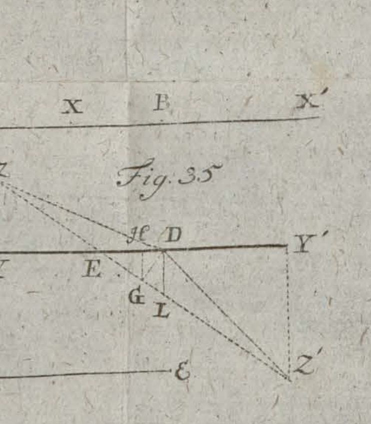
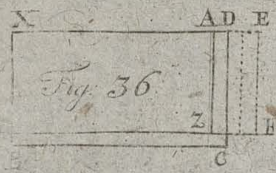

Fig. 24

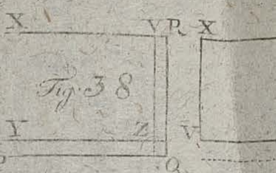

Fig. 27

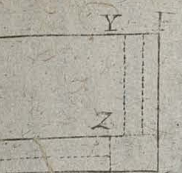

Fig. 31


Fig. 35



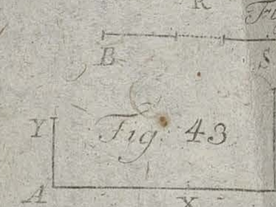














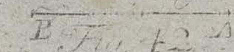


Fig. 44

E G F

A C X D B



